

Fractura em Metais Dúcteis
Modelação Numérica do Dano em Metais Dúcteis

Fábio José Pinho Reis

Dissertação para obtenção do Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Francisco Pires



FEUP

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Julho de 2009

Dedicado aos meus pais, Albino e Aurora.

Resumo

A presente tese teve como objectivo principal o estudo de modelos matemáticos a implementar em programas de elementos finitos para a caracterização da fractura de metais dúcteis, com recurso a modelos da Mecânica do Dano Contínuo.

Ao longo deste trabalho, foram estudados dois dos modelos de dano mais utilizados pela comunidade científica e pela indústria: o modelo original de Lemaitre (Lemaitre J. , 1990) e de Gurson (de Sousa Neto, Peric, & Owen, 2008). Ambos os modelos, para além de contabilizarem a degradação interna de um material com recurso a uma variável escalar de dano, possuem a capacidade de indicar por intermédio desta o local de rotura.

Recorrendo ao programa de elementos finitos “*Hyplas*” que possui estes dois modelos implementados e com base num vasto conjunto de simulações numéricas foi possível identificar algumas limitações destes modelos. Para tal efeito, construiu-se para ambos os modelos a curva de deformação plástica acumulada na rotura em função do coeficiente de triaxialidade. Posteriormente foram comparados os resultados numéricos com dados experimentais publicados recentemente por Wierzbicki (Bao & Wierzbicki, 2004). Por comparação, foi possível concluir que ambos os modelos apresentam resultados insatisfatórios quando efeitos de corte apresentam um papel importante, como é o caso de ensaios de compressão e de corte. Porém, para a gama de triaxialidades alta, típicas de solicitações de tracção, ambos possuem um bom comportamento.

Face aos resultados obtidos, foi proposto um novo modelo com base no modelo original de Gurson. À fracção volúmica de cavidades (variável de dano no modelo original de Gurson) foi adicionada uma componente de corte.

Em termos qualitativos os resultados obtidos com este modelo foram substancialmente melhores que os provenientes do modelo original de Gurson. No caso dos ensaios de corte e compressão testados com o novo modelo, verifica-se que o ponto de rotura indicado coincide com o ponto homólogo experimental, constatando-se que o novo modelo é capaz de caracterizar a degradação interna de um material devido a efeitos de corte. Porém, em termos quantitativos não é possível com os dados obtidos retirar uma conclusão cabal quanto às capacidades do novo modelo, existindo a necessidade de recorrer a ensaios experimentais para validar esta implementação.

Abstract

The main objective of this thesis was to study different mathematical models that can be implemented within Finite Element programs. These models, which are based on Continuum Damage Mechanics, should be able to characterize fracture onset in ductile materials.

Throughout this work, two models of damage widely used by scientific community and industry were studied: the original model of Lemaitre (Lemaitre J. , 1990) and Gurson's model (de Sousa Neto, Peric, & Owen, 2008). Both models, besides accounting for the internal degradation of the material by using one scalar variable denominated "*Damage*", have the ability to indicate through this, the location of rupture.

Using the finite element program "Hyplas" that has these two models implemented and by using a wide range of numerical simulations, it was possible to identify some limitations of these models. To this end, the curve of accumulated plastic deformation at rupture as a function of the coefficient of triaxiality was obtained and then compared with both numerical results and with experimental data recently published by Wierzbicki (Bao & Wierzbicki, 2004). By comparison, it was possible to conclude that both models have unsatisfactory results when shear effects have an important role, such as compression and shear dominated problems. However, in the range of high triaxialities, which are typical of tension dominated problems, both models have a good behavior.

Given the results, a new model based on the original Gurson model was proposed. The effect of shear was included in the original damage evolution law, which only accounted for the volume fraction of voids.

From a qualitative point of view, the results obtained with this development are significantly better than the results from the original Gurson model. In particular, by using the new model for shear and compression dominated tests, the point of rupture indicated coincides with the corresponding experimental point. However, it is not possible to quantitatively conclude about the full potential of model. Therefore, an experimental study would have to be carried out for complete validation of the proposed model.

Agradecimentos

A minha primeira palavra de agradecimento vai para o meu orientador, o Prof. Francisco Manuel Andrade Pires. Para além de me ter apoiado incondicionalmente ao longo deste trabalho, foi também fundamental na minha fase de transição de curso.

Aos grandes amigos Diogo Santos, Jorge Amorim e Tiago Espinhaço, o muito obrigado por estes 5 anos de partilha de uma casa e, acima de tudo, agradeço o vosso apoio que me transmitiram ao longo desta caminhada.

Ao meu grande amigo e colega de curso Rui Neves o meu profundo agradecimento pela enorme amizade que estabelecemos ao longo das nossas longas e infindáveis horas de trabalho.

À minha namorada Maribel, agradeço o ombro amigo que sempre tive nos momentos mais difíceis deste percurso.

Por último, não posso deixar de agradecer à minha irmã e, acima de tudo aos meus pais, pois foram os principais “propulsores” para que um dia eu fosse um Engenheiro.

A todos, o meu Muito Obrigado.

Fábio José Pinho Reis

Índice Geral

Índice de Figuras

Índice de tabelas

Simbologia

Capítulo 1 - Introdução 1

Capítulo 2 - Modelos Matemáticos para o estudo da degradação interna de materiais dúcteis 3

2.1. Introdução	3
2.2. Modelos Constitutivos	3
2.3. Modelo Elasto-Plástico.....	4
2.3.1. Critério de Cedência	4
2.3.2. Lei de Encruamento	7
2.3.3. Lei do Escoamento	10
2.4. Método dos Elementos Finitos (MEF)	11
2.4.1. Formulação integral – Método dos deslocamentos	12
2.4.2. Discretização no espaço	12
2.4.3. Discretização no tempo.....	16
2.4.4. Actualização do estado de tensão e variáveis internas	19
2.4.5. Elemento finito quadrático de 8 nós.....	20
2.5. Conclusões.....	21

Capítulo 3 - Mecânica do Dano Contínuo..... 22

3.1. Introdução	22
3.2. Classificação do dano	23
3.2.1. Dano frágil	23
3.2.2. Dano dúctil	23
3.2.3. Dano por fluência	23
3.2.4. Dano por fadiga	23
3.3. Mecânica do Dano Contínuo	24
3.3.1. Um pouco de história	24

3.4. Domínio de validade e de utilização	25
3.5. Aspectos fenomenológicos	25
3.5.1. Definição da variável de dano	26
3.5.2. Tensão efectiva	27
3.5.3. Medidas do dano.....	29
3.5.4. Leis elementares do dano	30
3.5.5. Critérios multiaxiais do dano	31
3.6. Modelos Particulares.....	31
3.6.1. Modelo de Lemaitre	31
3.6.2. Modelo de Gurson.....	32
3.6.2.1. Modelo de Gurson-Tvergaard-Needleman	34
3.7. Critérios de Fractura.....	35
3.7.1. Critério de Rice e Tracey	36
3.7.2. Critério de <i>McClintock</i>	36
3.8. Exemplos analíticos	37
3.8.1. Selecção de Material	37
3.8.2. Pressurização interna de um cilindro	38
3.8.2.1. Solução analítica.....	39
3.8.2.2. Solução Numérica	41
3.8.3. Flexão de uma viga.....	42
3.8.3.1. Solução Analítica	43
3.8.3.2. Solução Numérica	44
3.9. Conclusões.....	48
 Capítulo 4 - Dependência da triaxialidade na fractura	49
4.1. Introdução	49
4.2. Evolução da deformação plástica na rotura em função do coeficiente de triaxialidade.....	49
4.2.1. Ensaio realizados	50
4.2.2. Gamas de triaxialidade	52
4.2.3. Valor “ <i>Cut-off</i> ” de Triaxialidade	53
4.3. Construção da curva deformação plástica acumulada na rotura vs triaxialidade para os modelos de Lemaitre e de Gurson	53
4.3.1. Selecção do Material.....	54
4.3.2. Relação entre o dano e a fracção volúmica	54
4.3.3. Simulações Numéricas	56

4.3.3.1. Ensaio de Tracção de provetes cilíndricos.....	56
4.3.3.2. Ensaio de Compressão.....	66
4.3.3.3. Ensaio de Corte.....	72
4.3.3.4. Ensaio de tracção em estado plano de deformação – “Flat Grooved”	78
4.3.4. Curva deformação plástica acumulada na rotura <i>versus</i> coeficiente de triaxialidade	81
4.4. Conclusões.....	83

Capítulo 5 - Introdução do efeito de Corte no modelo original de Gurson 84

5.1. Introdução.....	84
5.2. Efeito de Corte	84
5.3. Dependência do ângulo de <i>Lode</i> normalizado.....	87
5.4. Introdução da variável de dano no modelo original de Gurson	88
5.5. Algoritmo.....	90
5.5.1. Algoritmo de actualização das tensões.....	90
5.5.2. Método de <i>Newton Raphson</i> aplicado ao modelo constitutivo a implementar.....	93
5.5.3. Matriz tangente consistente	95
5.6. Resultados Numéricos.....	98
5.6.1. Ensaio de corte puro apenas num elemento finito.....	98
5.6.2. Provede de Corte	99
5.6.3. Ensaio de tracção em estado plano de deformação	103
5.6.3.1. Provede com entalhe - “Flat Grooved”	103
5.6.3.2. Provede de tracção em estado plano de deformação sem entalhe.....	105
5.6.4. Ensaio de tracção em provetes cilíndricos	107
5.6.5. Ensaio de compressão em provetes cilíndricos com entalhe.....	107
5.7. Conclusões.....	108

Capítulo 6 - Conclusões e Perspectivas Futuras..... 110

6.1. Síntese da dissertação.....	110
6.2. Conclusões Gerais	110
6.3. Perspectivas Futuras	111

Anexo A - Método de *Newton-Raphson* 113

Anexo B - Método <i>Backward</i> de Euler	115
Anexo C - Derivadas necessárias no método de <i>Newton-Raphson</i>	116
Anexo D - Derivadas tensoriais para o algoritmo da matriz tangente consistente.....	121
Bibliografia	126

Índice de Figuras

Capítulo 2

Figura 2.1 - Representação da superfície de cedência de von Mises no espaço de Westergaard.	7
Figura 2.2 - Curva de reacção num ensaio de tracção.	8
Figura 2.3 - Representação do efeito de Bauschinger.	10
Figura 2.4 - Modelos de encruamento. a) Modelo de encruamento isotrópico; b) Modelo de encruamento cinemático.	10
Figura 2.5 - Elemento Finito quadrangular de 8 nós.	21

Capítulo 3

Figura 3.1. Campo de aplicação da Mecânica do dano contínuo.	25
Figura 3.2 - Elemento de volume representativo danificado.	26
Figura 3.3 – Princípio da equivalência da deformação (Lemaitre & Chaboche, 1984).	28
Figura 3.4 - Medição do dano pela variação do módulo de Young (Lemaitre & Chaboche, 1984).	29
Figura 3.5 - Geometria considerada por McClintock no seu modelo de fractura.	36
Figura 3.6 - Dimensões do cilindro.	39
Figura 3.7 - Malha de elementos finitos com 160 elementos para a simulação da pressurização interna de um cilindro.	41
Figura 3.8. Pressurização do cilindro de raio médio $R_{cil} = 100 \text{ mm}$ e espessura $t_{cil} = 10 \text{ mm}$. a) Distribuição da variável de dano; b) Distribuição da deformação plástica acumulada.	42
Figura 3.9 - Dimensões da viga simulada.	44
Figura 3.10. Malhas de elementos finitos utilizadas na simulação da flexão de uma viga. a) Malha com 200 elementos finitos; b) Malha com 1000 elementos finitos.	44
Figura 3.11. Superfície analítica do trabalho plástico.	45
Figura 3.12 - Distribuição da variável de dano na malha com 1000 elementos.	46
Figura 3.13. Resultados numéricos da flexão da viga.	47
Figura 3.14. Erro entre a solução numérica e a analítica.	47

Capítulo 4

Figura 4.1 - Curva da deformação plástica acumulada na rotura em função do coeficiente de triaxialidade obtida por Wierzbick a partir de resultados experimentais (Bai, 2008).	52
Figura 4.2 - Geometria dos provetes cilíndricos (Xue, 2007). (a) Provete cilíndrico sem entalhe. (b) $R = 18 \text{ mm}$. (c) $R = 9 \text{ mm}$. (d) $R = 4.5 \text{ mm}$	57
Figura 4.3 - Malha de elementos finitos. (a) Provete cilíndrico sem entalhe com 320 elementos; (b) Provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 18 \text{ mm}$ com 451 elementos; (c) Provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 9 \text{ mm}$ com 456 elementos; (d) Provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 4.5 \text{ mm}$ com 417 elementos.	58
Figura 4.4. Curva de reacção do provete cilíndrico sem entalhe para os diferentes modelos em análise.	59
Figura 4.5. Curva de reacção para o provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 18 \text{ mm}$	59
Figura 4.6. Curva de reacção do provete cilíndrico com entalhe de Raio $R = 4.5 \text{ mm}$	60

Figura 4.7. Distribuição da variável de dano no provete sem entalhe para um deslocamento prescrito de 7.283 mm. (a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.	61
Figura 4.8. Distribuição da variável de dano no provete com entalhe de raio $R = 18$ mm para um deslocamento prescrito de 1.12 mm. (a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.	62
Figura 4.9. Distribuição da variável de dano no provete com entalhe de raio $R = 9$ mm para um deslocamento prescrito de 0.898 mm. (a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.	62
Figura 4.10. Distribuição da variável de dano no provete com entalhe de raio $R = 4.5$ mm para um deslocamento prescrito de 0.75 mm. (a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.	63
Figura 4.11. Evolução da variável de dano no provete entalhado de raio $R = 18$ mm.	64
Figura 4.12. Representação da evolução da fracção volúmica em escala logarítmica para o provete com entalhe de raio $R = 18$ mm.	64
Figura 4.13. Evolução da deformação plástica acumulada no ponto de rotura no provete entalhado de raio $R = 18$ mm.	65
Figura 4.14. Curva de reacção do provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 18$ mm à compressão	67
Figura 4.15. Curva de reacção do provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 9$ mm à compressão.	67
Figura 4.16. Curva de reacção do provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 4.5$ mm à compressão	68
Figura 4.17. Distribuição da variável de dano para o provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 18$ mm à compressão para um deslocamento prescrito de 1.77 mm. (a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.	69
Figura 4.18. Distribuição da variável de dano para o provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 9$ mm à compressão para um deslocamento prescrito de 1.271 mm. (a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.	69
Figura 4.19. Distribuição da variável de dano para o provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 4.5$ mm à compressão para um deslocamento prescrito de 1.3 mm. (a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.	70
Figura 4.20. Distribuição da deformação plástica acumulada no provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 18$ mm à compressão para um deslocamento prescrito de 1.77 mm. (a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.	71
Figura 4.21. Distribuição da deformação plástica acumulada no provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 9$ mm à compressão para um deslocamento prescrito de 1.271 mm. (a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.	71
Figura 4.22. Distribuição da deformação plástica acumulada no provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 4.5$ mm à compressão para um deslocamento prescrito de 1.3 mm. (a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.	72
Figura 4.23. - Provete de Corte. a) Dimensões do provete de corte utilizado; b) Malha de elementos finitos com 518 elementos.	73
Figura 4.24. Curvas de reacção para o provete de corte	74
Figura 4.25. Distribuição da variável de dano para o provete de corte para um deslocamento prescrito de 2.4 mm. (a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.	75
Figura 4.26. Evolução da variável de dano no ponto crítico do provete de corte.	76

Figura 4.27. Distribuição da deformação plástica acumulada no provete de corte para um deslocamento prescrito de 2.4 mm. a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.	77
Figura 4.28. Evolução da Deformação plástica no ponto crítico do provete de corte.	78
Figura 4.29. Provete para ensaio de tracção em estado plano de deformação (Bai, 2008). a) Geometria do provete. b) Malha de elementos finitos constituída por 400 elementos.	79
Figura 4.30. Curva de reacção do ensaio de tracção em estado plano de deformação.	79
Figura 4.31. Distribuição da variável de dano no provete de tracção em estado plano de deformação para um deslocamento prescrito de 0.326 mm. a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.	80
Figura 4.32. Distribuição da deformação plástica acumulada no provete de tracção em estado plano de deformação para um deslocamento prescrito de 0.326 mm. a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.	80
Figura 4.33. Curva deformação plástica acumulada na rotura <i>versus</i> coeficiente de triaxialidade resultante das simulações numéricas.	81
Figura 4.34 - Simulação de corte puro num elemento de quatro nós. a) Fracção volúmica no estado inicial; b) Fracção volúmica no estado final.	82

Capítulo 5

Figura 5.1 - Elemento representativo. a) Estado inicial; b) Estado final após solicitação de corte.	85
Figura 5.2. Representação do coeficiente de triaxialidade em função do ângulo normalizado de Lode para estados iniciais de tensão (Bai, 2008).	88
Figura 5.3. Distribuição da variável de dano com efeito de corte num elemento quadrangular de quatro nós solicitado ao corte.	98
Figura 5.4. Evolução da variável de dano.	99
Figura 5.5. Curvas de reacção.	100
Figura 5.6. Distribuição da variável de dano no provete de corte para um deslocamento prescrito de 2.4 mm. a) Porosidade inicial $f_0 = 0.001$; b) Porosidade inicial $f_0 = 0.01$; c) Porosidade inicial $f_0 = 0.05$.	100
Figura 5.7. Evolução da variável de dano no ponto crítico do provete de corte.	101
Figura 5.8. Distribuição da deformação plástica acumulada no provete de corte para um deslocamento prescrito de 2.4 mm. a) Porosidade inicial $f_0 = 0.001$; b) Porosidade inicial $f_0 = 0.01$; c) Porosidade inicial $f_0 = 0.05$.	101
Figura 5.9 - Curva de Reacção do ensaio de corte com elevado deslocamento prescrito.	103
Figura 5.10. Distribuição da variável de dano no provete de tracção com entalhe em estado plano de deformação para um deslocamento prescrito de 0.326 mm. a) Porosidade inicial $f_0 = 0.001$; b) Porosidade inicial $f_0 = 0.01$; c) Porosidade inicial $f_0 = 0.05$.	104
Figura 5.11. Evolução da variável de dano no ponto crítico do provete com entalhe em estado plano de deformação.	104
Figura 5.12. Distribuição da variável de dano para um deslocamento prescrito de 0.326 mm. a) Modelo de Gurson com efeito de corte, $f_0 = 0.001$; b) Modelo original de Gurson, $f_0 = 0.001$.	105
Figura 5.13. Curvas de reacção do provete de tracção com entalhe em estado plano de deformação.	105
Figura 5.14. Novo provete de tracção em estado plano de deformação. a) Geometria do provete; b) Malha de elementos finitos com 3714 elementos (Teng, 2008).	106

Figura 5.15. Distribuição da variável de dano para um deslocamento prescrito de 4.2011 <i>mm</i> . a) Modelo de Gurson com efeito de Corte; b) Modelo original de Gurson.....	107
Figura 5.16. - Distribuição da variável de dano no provete cilíndrico com entalhe $R = 4.5$ <i>mm</i> à compressão.	108

Anexo D

Figura D.1 - Funções $g(\xi)$ e $h(\xi)$	123
--	-----

Índice de Tabelas

Capítulo 3

Tabela 3.1. Propriedades Mecânicas da liga de alumínio 2024 – T351.....	38
--	----

Capítulo 4

Tabela 4.1. Valores experimentais do coeficiente de triaxialidade e respectiva deformação plástica acumulada na rotura obtidos por Wierzbicki (Bai, 2008).	51
Tabela 4.2 - Propriedades Mecânicas da liga de alumínio 2024 – T351.....	54
Tabela 4.3 - Fracção volúmica crítica obtida pelo método analítico apresentado para um ensaio de tracção.....	56
Tabela 4.4. Resultados da deformação plástica acumulada na rotura e respectivo coeficiente de triaxialidade obtidos pelas simulações numéricas para os ensaios de tracção.	66
Tabela 4.5. Resultados da deformação plástica acumulada na rotura e respectivo coeficiente de triaxialidade obtidos pelas simulações numéricas para os ensaios de compressão.	72
Tabela 4.6. Resultados da deformação plástica acumulada na rotura e respectivo coeficiente de triaxialidade obtidos pelas simulações numéricas para os ensaios de corte.....	78
Tabela 4.7. Resultados da deformação plástica acumulada na rotura e respectivo coeficiente de triaxialidade obtidos pelas simulações numéricas para o ensaio de tracção em estado plano de deformação.	81

Capítulo 5

Tabela 5.1 - Convergência do novo modelo no ensaio de corte com uma porosidade inicial de $f_0 = 0.01$	99
Tabela 5.2. Resultados da deformação plástica acumulada na rotura e respectivos coeficientes de triaxialidade para o modelo original de Gurson e com efeito de corte.	102

Simbologia

De forma a facilitar a análise deste documento, apresenta-se numa forma compacta todos os símbolos utilizados.

Simbologia Geral

$(*)^e$	Componente elástica
$(*)^p$	Componente plástica
$\det (*)$	Determinante
$\partial(*)/\partial(*)$	Derivada Parcial
$(*)^T$	Transposto de um tensor
$(*)^{-1}$	Inverso de uma matriz
$(*):(*)$	Dupla contracção de dois tensores
$(*) \otimes (*)$	Produto didáctico de dois tensores
$\Delta(*)$	Incremento

Símbolos Particulares

a e a'	Distância entre a fronteira da célula e da cavidade
A	Forças termodinâmicas de endurecimento
A_0	Coeficiente do material característico do dano de fluência
A	Constante na curva de endurecimento do material
b	Forças por unidade de volume
\tilde{b}	Forças por unidade de volume total
B	Matriz das deformações
D^{ep}	Matriz tangente consistente ou matriz elasto-plástica
D^e	Matriz de elasticidade
D	Variável de dano (isotrópico)
D_c	Valor crítico do dano
D_n	Medida do dano local normal a \vec{n}
\dot{D}	Evolução da variável de dano
E	Módulo de Young
\tilde{E}	Módulo de Young corrigido com dano
f^{int}	Forças interiores
f^{ext}	Forças exteriores
f	Fracção volúmica de microcavidades
\dot{f}	Taxa da fracção volúmica de microcavidades
f^*	Fracção volúmica no modelo <i>GTN</i>
f_c	Fracção volúmica de microcavidades crítica
f_{cr}	Fracção volúmica a partir da qual se verifica o fenómeno de coalescência
f_f	Fracção volúmica na rotura
f_{rot}	Fracção volúmica na rotura
F_N	Fracção volúmica de cavidades que poderá ser nucleada
F	Função de Cedência
$g_{\bar{\theta}}$	Função dependente do ângulo de <i>Lode</i> normalizado
G	Módulo de corte
H	Módulo generalizado de endurecimento

H	Tangente à curva de tracção
I_R	Indicador de rotura de Rice e Tracey
I_{MC}	Indicador de rotura de McClintock
I_1, I_2, I_3	Invariantes do tensor das tensões
\mathbf{I}	Tensor identidade de segunda ordem
\mathbb{I}	Tensor identidade de quarta ordem
J_1, J_2, J_3	Invariantes do tensor desviador das tensões
$J(\xi)$	Determinante da matriz jacobiana
k	Variável de endurecimento
K	Módulo de compressibilidade
\mathcal{K}	Espaço dos deslocamentos admissíveis
\mathcal{K}^d	Espaço dos deslocamentos admissíveis discretizado no espaço
\mathbf{K}_T	Matriz tangente de rigidez.
L	Comprimento da célula
\vec{n}	Vector normal à superfície
n	Expoente de endurecimento do material
N_i	Função de forma no nó i
\mathbf{N}	Vector de Fluxo
\mathbf{N}	Matriz das funções de forma
p	Pressão
P	Carga uniaxial
P_c	Pressão crítica
P	Pressão interna no cilindro
r	Resíduo
r_0	Coeficiente do material característico do dano de fluência
R_{cil}	Raio médio do cilindro
R	Variável de endurecimento
\dot{R}	Taxa da variável de endurecimento
R	Raio da cavidade circular
\mathbf{s}	Tensor desviador das tensões (notação tensorial)
s_{ij}	Tensor desviador das tensões (notação indicial)
s_0	Expoente de Lemaitre
s_N	Desvio padrão da distribuição normal da deformação plástica acumulada
S	Área de um elemento de volume representativo identificado pela normal \vec{n}
\tilde{S}	Área resistente efectiva
S_D	Área total dos vestígios de defeitos corrigida para a concentração de tensões
S_0	Denominador de Lemaitre
t	Tempo
t_{cil}	Espessura da parede do cilindro
\mathbf{t}	Forças por unidade de área
$\tilde{\mathbf{t}}$	Forças por unidade de área total
\mathbf{u}	Campo de deslocamentos
ν	Coeficiente de Poisson
v_m	Volume da matriz de um material
\mathcal{V}	Espaço dos deslocamentos virtuais
\mathcal{V}^d	Espaço dos deslocamentos virtuais discretizado no espaço

w_i	Peso nos pontos de integração
w^p	Trabalho plástico
w_r^p	Trabalho plástico na rotura
Y	Taxa de libertação de energia elástica
$\dot{\alpha}$	Evolução das variáveis de endurecimento
α	Ângulo
β	"Back Stresses"
δ_{ij}	Símbolo de Kronecker
ε_{eq}^p	Deformação plástica equivalente
$\bar{\varepsilon}^p$	Deformação plástica acumulada
$\bar{\varepsilon}_{rot}^p$	Deformação plástica acumulada na rotura
ε_{eq}^e	Deformação elástica equivalente
ε_v	Deformação volumétrica
$\dot{\varepsilon}_v^p$	Taxa da deformação volumétrica plástica
$\dot{\varepsilon}_v$	Taxa da deformação volumétrica
ε_N	Valor médio da distribuição normal da deformação plástica acumulada
$\bar{\varepsilon}^p$	Evolução da deformação plástica acumulada
$\bar{\varepsilon}_D^p$	Deformação plástica acumulada a partir da qual se verifica a evolução do dano
ε_{corte}	Deformação de corte
ε_{rot}	Deformação de rotura
ε_{eq}	Deformação equivalente (incluindo componente elástica e plástica)
$\dot{\varepsilon}_{eq}$	Taxa da deformação equivalente (incluindo componente elástica e plástica)
$\varepsilon_{m\acute{a}x}$	Deformação máxima
ε_d	Tensor desviador das deformações
ε	Tensor das deformações
$\dot{\varepsilon}$	Tensor da taxa de deformação total
ε^e	Deformação uniaxial elástica
ε_p	Deformação uniaxial plástica
ε_D	Deformação plástica uniaxial partir da qual ocorre evolução do dano
ε_{pr}	Deformação plástica uniaxial na rotura
$\dot{\gamma}$	Multiplicador Plástico
Ω	Fronteira
σ_Y	Tensão de cedência do material
σ_{y0}	Tensão de cedência inicial do material
σ	Tensão convencional
$\tilde{\sigma}$	Tensão efectiva (corrigida com dano)
$\tilde{\sigma}_u$	Tensão uniaxial de rotura corrigida com dano
σ_u	Tensão uniaxial de rotura
σ_v	Tensão efectiva
σ_{eq}	Tensão equivalente de von Mises
σ_a, σ_b	Tensões principais na direcção a e b
σ_H	Tensão hidrostática
σ	Tensor das Tensões (notação tensorial)
σ_{ij}	Tensor das Tensões (notação indicial)
$\tilde{\sigma}$	Tensor das tensões corrigido com dano

τ	Tensão de corte
Γ	Coeficiente de triaxialidade
ξ	Coordenadas dos pontos de integração
$\boldsymbol{\eta}$	Campo de deslocamentos virtuais
ρ	Densidade
ρ_m	Densidade da matriz de um material
$\dot{\rho}$	Taxa da densidade
$\dot{\rho}_m$	Taxa de evolução da densidade da matriz de um material
λ	Incremento de carregamento
θ	Ângulo de <i>Lode</i>
$\bar{\theta}$	Ângulo normalizado de <i>Lode</i>
Ω	Domínio do problema
Ω^d	Domínio do problema discretizado
Φ	Critério de Cedência
Φ_D	Superfície limite de dano
Ψ	Potencial de Escoamento
\mathcal{V}	Fronteira
ψ	Potencial termodinâmico
ψ^*	Potencial termodinâmico

Capítulo 1

Introdução

Actualmente, a simulação numérica de processos de fabrico consiste numa ferramenta chave nas indústrias de ponta, permitindo projectar produtos com geometrias cada vez mais complexas em períodos de tempo cada vez menores.

Com o “boom” dos computadores no fim do século passado, as ferramentas numéricas de simulação tiveram um desenvolvimento exponencial. Numa primeira fase, os modelos de simulação numérica eram relativamente simples, não permitindo abarcar todos os diferentes fenómenos presentes num material quando este é deformado. Posteriormente, os modelos desenvolveram-se significativamente, permitindo contabilizar diversos fenómenos associados ao tipo de material e processo de fabrico como, por exemplo, efeitos térmicos e a degradação interna de um material.

A **Mecânica do Dano Contínuo (MDC)** consiste num ramo da Mecânica dos Meios Contínuos e, tal como o próprio nome indica, tem como objectivo desenvolver modelos que contabilizem a degradação interna de um material. É com recurso a uma nova variável – **variável de dano** – que a degradação interna de um material é contabilizada. Simultaneamente, pode-se utilizar esta variável como um indicador de rotura. Dois dos modelos de dano mais utilizados, quer pela indústria quer pela comunidade científica, são os modelos originais de Lemaitre (Lemaitre J. , 1990) e Gurson (de Sousa Neto, Peric, & Owen, 2008). O primeiro modelo é fenomenológico e foi desenvolvido com base na teoria da termodinâmica dos processos irreversíveis com variáveis internas (Lemaitre & Chaboche, 1984), enquanto o segundo trata-se de um modelo micromecânico que possui como variável de dano a fracção volúmica de cavidades no material.

Inicialmente, quando a problemática da mecânica da fractura começou a ser estudada, admitia-se que o fenómeno responsável pela rotura de um material consistia na nucleação, crescimento e coalescência de vazios internos. Esta conclusão é completamente válida para a maior parte dos estados de tracção. No entanto, com o desenvolvimento de novas ferramentas experimentais, foi possível provar que efeitos de deslizamento de planos cristalográficos – *efeitos de corte* – apresentam um papel bastante importante em alguns casos, nomeadamente em solicitações de corte puro e de compressão.

É com base nestas informações que esta dissertação se insere, sendo o principal objectivo deste trabalho o estudo e desenvolvimento de modelos de dano capazes de caracterizar coerentemente os fenómenos responsáveis pela rotura de metais dúcteis.

Estrutura deste documento

Este documento é composto por 6 capítulos (incluindo o primeiro capítulo relativo a esta introdução) e por 4 anexos.

No **Capítulo 2** apresentam-se os modelos matemáticos mais utilizados para a caracterização do comportamento do material. Em coerência com o objectivo deste trabalho, o modelo elasto-plástico foi seleccionado como base para o desenvolvimento de modelos de dano. Para este modelo, introduzem-se as várias leis que o constituem e, recorrendo ao **Método dos Elementos Finitos (MEF)**, apresenta-se algoritmos capazes de o implementar.

No **Capítulo 3**, introduzem-se os conceitos subjacentes aos modelos de dano, tais como a definição da variável de dano e tensão efectiva. Neste mesmo capítulo, são apresentados dois modelos de dano: o modelo de Lemaitre (Lemaitre J. , 1990) e o de Gurson (de Sousa Neto, Peric, & Owen, 2008). No caso particular do modelo de Gurson, apresenta-se também uma extensão sua, denominada por modelo Gurson-Tvergaard-Needleman (**GTN**) (Xue, 2007). Por último, são apresentados dois problemas relativamente simples para os quais é possível estabelecer uma solução analítica sendo esta, comparada com resultados numéricos obtidos com recurso ao modelo de Lemaitre.

No **Capítulo 4**, com recurso a um vasto número de ensaios numéricos, constrói-se a curva de deformação plástica na rotura, $\bar{\epsilon}_{rot}^p$, em função do respectivo coeficiente de triaxialidade, Γ , para os modelos originais de Lemaitre e Gurson, permitindo desta forma comparar os resultados numéricos com os resultados experimentais publicados recentemente por Wierzbicki (Bao & Wierzbicki, 2004) (Bai, Bao, & Wierzbicki, 2006) (Bai, 2008).

Com base nas conclusões retiradas no capítulo 4, no **Capítulo 5** propõe-se uma alteração ao modelo de Gurson de forma a introduzir uma componente de corte na evolução do dano, apresentando-se os vários passos necessários para a sua implementação numérica. Por último, apresentam-se os resultados deste novo modelo.

No **Capítulo 6** e último deste documento, descrevem-se as principais conclusões e sugestões para futuras implementações.

Relativamente aos anexos, apresentam-se nestes as principais ferramentas de cálculo numérico e possíveis informações úteis para leitores deste documento. No **Anexo A** é apresentado o método de *Newton-Raphson* para a resolução de sistemas compostos por equação não lineares, e no **Anexo B**, o método *Backward* de Euler, para a resolução de equações diferenciais de primeira ordem. No **Anexo C** são apresentadas as derivadas necessárias para o algoritmo de actualização de estado e, no último anexo, as derivadas necessárias para o cálculo da matriz tangente consistente.

Modelos Matemáticos para o estudo da degradação interna de materiais dúcteis

2.1. Introdução

Em problemas mecânicos existem três causas principais para que um sólido não apresente um comportamento linear: a primeira consiste no próprio comportamento do material, a segunda em factores geométricos (por exemplo, a instabilidade geométrica associada à compressão de uma viga) e a terceira e última, tem origem no contacto entre sólidos.

A análise da degradação interna da microestrutura de um material é por si só um problema não linear. Usualmente, a evolução do dano encontra-se associada a grandes deformações e irreversíveis (deformações plásticas). Se adicionarmos a este problema factores de não-linearidade associados à geometria do sólido em análise, obtém-se um problema extremamente não-linear, obrigando a utilização de ferramentas avançadas para uma correcta descrição do comportamento do sólido.

Para a modelação do dano interno em metais dúcteis à temperatura ambiente, o modelo constitutivo utilizado como base foi o modelo elasto-plástico (secção 2.2).

Ao longo da secção 2.3 são apresentadas as leis fundamentais para a caracterização do modelo seleccionado. A lei de encruamento que descreve a evolução das variáveis internas associadas ao endurecimento do material é apresentada na secção 2.3.2 e a lei de fluxo plástico na secção 2.3.3.

Face à complexidade destes modelos não é possível obter soluções analíticas para a maior parte dos problemas com interesse prático, sendo necessárias ferramentas numéricas para a sua resolução. O método por excelência escolhido para a resolução destes problemas é o Método dos Elementos Finitos (**MEF**). Ao longo da secção 2.4 é apresentado este método.

2.2. Modelos Constitutivos

Existem na literatura fundamentalmente três modelos matemáticos para descrever o comportamento constitutivo de um material:

- Modelo elasto-plástico;
- Modelo elasto-viscoplástico;
- Modelo rígido plástico ou viscoplástico;

A selecção do modelo a utilizar deverá basear-se no tipo de solicitações e propriedades do material em análise. À temperatura ambiente, os metais dúcteis são devidamente descritos por

modelos Elasto-Plásticos. Porém, a elevadas temperaturas, o material sofre efeitos de fluência e de viscoplasticidade e, como tal, é necessário adoptar modelos elasto-viscoplástico ou modelos rígido-viscoplásticos (neste último caso quando a componente elástica pode ser desprezada).

Face aos três modelos anteriormente apresentados e tendo em conta que se pretende simular o comportamento de metais dúcteis quando solicitados externamente (forças ou deslocamentos prescritos sendo desprezáveis os efeitos térmicos), o modelo seleccionado é o elasto-plástico, permitindo assim combinar efeitos de elasticidade, plasticidade e dano.

O quadro seguinte apresenta resumidamente o modelo elasto-plástico (de Sousa Neto, Peric, & Owen, 2008).

Quadro 2.1 - Modelo constitutivo elasto-plástico.

1. Decomposição aditiva do tensor da deformação	$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$
ou	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$
2. Função de Energia Livre	$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha})$
3. Leis constitutivas para o tensor das tensões e forças termodinâmicas de endurecimento	$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad \quad \quad \mathbf{A} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$
Onde $\boldsymbol{\alpha}$ consiste nas variáveis internas de encruamento	
4. Resposta elástica	$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$
5. Critério de Cedência	$\Phi = \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$
6. Resposta em domínio plástico	
- lei de escoamento	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$
- lei de encruamento	$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\gamma} \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$
7. Critério de carregamento/não carregamento	
$\Phi \leq 0$	$\dot{\gamma} \geq 0 \quad \quad \quad \Phi \dot{\gamma} = 0$

Nas secções seguintes deste documento serão descritas as diversas variáveis apresentadas no quadro anterior.

2.3. Modelo Elasto-Plástico

Ao longo desta secção serão definidos os principais conceitos que caracterizam o modelo elasto-plástico. Numa primeira fase, será abordado a definição de critério de cedência. De seguida será introduzido o conceito de encruamento e, por último, a lei de escoamento.

2.3.1. Critério de Cedência

Um critério de cedência é tipicamente apresentado da seguinte forma:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0 \quad (2.1)$$

onde \mathbf{A} indica um conjunto de variáveis de endurecimento e $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor das tensões. No caso de um material isotrópico, verifica-se que a tensão de cedência plástica depende exclusivamente da

grandeza das tensões principais aplicadas e nunca das suas orientações no espaço das tensões. Neste caso, o conjunto de variáveis de endurecimento resume-se apenas a um escalar, denominado de parâmetro de encruamento, k . Desta forma, Φ consiste também num escalar, podendo ser definido da seguinte forma:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, k) = F(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_Y(k) = 0 \quad (2.2)$$

em que $F(\boldsymbol{\sigma})$ consiste na função de cedência dependente do estado de tensão e σ_Y é a tensão de cedência do material em função da variável k . Esta função pode tomar várias formas analíticas com representação geométrica no espaço distintas. Tratando-se de uma função de tensão, pode assumir-se como espaço para a respectiva representação geométrica o espaço de tensões de Westergaard.

Admitindo que a função de cedência é independente do referencial adoptado, é possível defini-la em função dos três invariantes das tensões.

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (2.3)$$

$$I_2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) = -(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\sigma_{zz}) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 \quad (2.4)$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{xz}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (2.5)$$

Experimentalmente, conclui-se que a deformação plástica na ausência de degradação interna (dano) é praticamente independente da tensão hidrostática σ_H , que em termos de notação tensorial pode exprimir-se por:

$$\sigma_H = \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{ij} = \frac{1}{3}J_1 \quad (2.6)$$

onde δ_{ij} consiste no símbolo de Kronecker, definido da seguinte forma:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.7)$$

Consequentemente, a partir da definição das tensões de desvio

$$\mathbf{s} = dev(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_H\mathbf{I} \quad (2.8)$$

onde \mathbf{I} consiste no tensor identidade de segunda ordem, é possível definir a função de cedência exclusivamente em função do segundo e terceiro invariante das tensões de desvio:

$$J_2 = \frac{1}{2}tr(\mathbf{s}^2) = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ji} \quad (2.9)$$

$$J_3 = \frac{1}{3}tr(\mathbf{s}^3) = \frac{1}{3}s_{ij}s_{jk}s_{ki} = \det(\mathbf{s}) \quad (2.10)$$

Atendendo à equação que rege o critério de cedência $\Phi(\sigma, k)$ pode-se concluir que, se num determinado ponto de um corpo material deformável se verificar a inequação $F(\sigma) < \sigma_Y(\alpha)$, o ponto apresenta um comportamento elástico (o estado de tensão encontra-se no interior da superfície de cedência). Porém, se $F(\sigma) = \sigma_Y(\alpha)$, o comportamento será plástico. Atingido este estado, o comportamento subsequente nesse ponto será condicionado pela variação de F relativamente ao tensor das tensões, σ ,

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T d\sigma \quad (2.11)$$

onde $\frac{\partial F}{\partial \sigma}$ é um vector normal à superfície de cedência. Se $dF < 0$, o material encontra-se perante uma situação de descarregamento elástico. Neste caso, o estado de tensão encontra-se no interior da superfície de cedência, retomando o material um comportamento elástico. No caso de $dF = 0$, não ocorre nenhuma alteração à superfície de cedência. Isto verifica-se em materiais considerados perfeitamente plásticos. Porém, se $dF > 0$, o estado de tensão mantém-se sobre a superfície de cedência, apesar desta última ser alterada. Este caso é relativo a materiais que apresentem encruamento.

Uma das funções de cedência mais utilizadas na análise do comportamento de um metal dúctil é a função de cedência de von Mises.

Critério de von Mises

Em 1913 (Zienkiewicz & Taylor, 2005), von Mises formulou um critério de cedência, tendo por base que a cedência ocorre quando o segundo invariante das tensões de desvio, J_2 atinge um valor crítico:

$$\Phi(\sigma, k) = \sqrt{3J_2} - \sigma_Y(k) = \sqrt{J_2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_Y(k) = 0 \quad (2.12)$$

O primeiro termo da equação anterior, $\sqrt{3J_2}$ é denominado de tensão equivalente de von Mises, tensão efectiva ou tensão generalizada, podendo ser escrita em função do tensor desviador das tensões:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}(s_{ij}s_{ij})}^{1/2} \quad (2.13)$$

Relativamente à representação desta função de cedência no espaço de Westergaard, esta não é mais que um cilindro cujo eixo encontra-se coincidente com o eixo hidrostático (Fig. 2.1)

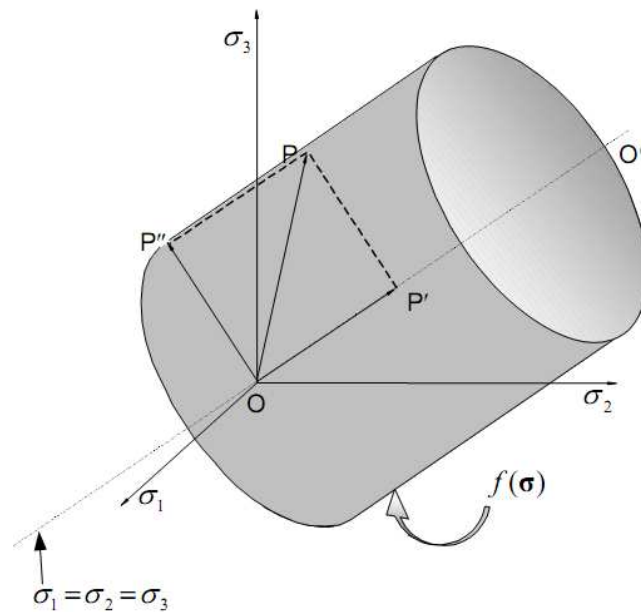


Figura 2.1 - Representação da superfície de cedência de von Mises no espaço de Westergaard (Natal Jorge & Dinis, 2004).

Para além do critério de von Mises anteriormente apresentado, encontramos outros critérios amplamente utilizados na caracterização de materiais dúcteis, como é o caso do critério de Tresca. Este critério admite que a deformação plástica ocorre sempre que a tensão tangencial máxima atinge um determinado valor limite. Tal como o critério de von Mises, o critério de Tresca não depende da tensão hidrostática, tornando-os pouco realistas na caracterização de alguns materiais, tais como, solos, rochas e betão. Para tal efeito, é adequado utilizar por exemplo, os critérios de Mohr-Coulomb ou Drucker-Prager (de Sousa Neto, Peric, & Owen, 2008) (Zienkiewicz & Taylor, 2005).

Refira-se também que a superfície de cedência deverá apresentar uma forma regular e convexa. Cumprindo estes requisitos, a função de cedência satisfaz o postulado de Drucker, ou seja, o material apresenta um comportamento estável e inelástico (Zienkiewicz, Taylor, & Zhu, 2005).

2.3.2. Lei de Encruamento

No caso de um ensaio de tracção uniaxial, ultrapassada a tensão de cedência inicial, verifica-se o encruamento do material. Este fenómeno por outras palavras, não é mais do que o aumento da tensão de cedência com o aumento da deformação (Fig. 2.2.).

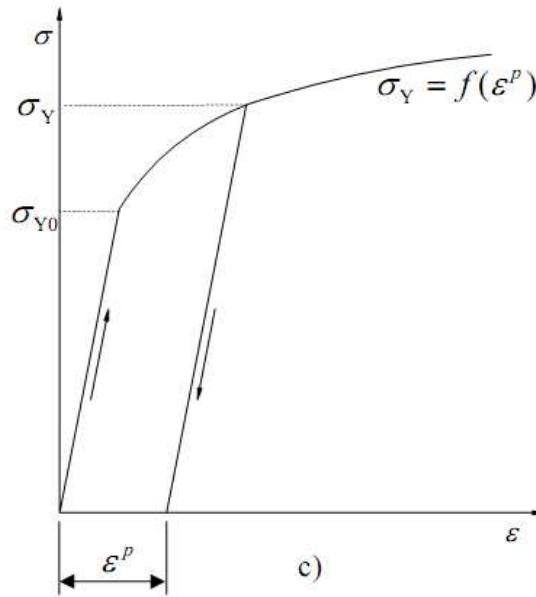


Figura 2.2 - Curva de reacção num ensaio de tracção (Natal Jorge & Dinis, 2004).

Porém, no caso multiaxial, há a necessidade de definir uma lei capaz de caracterizar o encruamento do material, bem como a evolução das variáveis internas intrínsecas a este fenómeno – **lei de encruamento**.

A caracterização da evolução das variáveis internas associadas ao encruamento do material num modelo constitutivo elasto-plástico, $\dot{\alpha}$, é definido pelo módulo generalizado de endurecimento H e pelo multiplicador plástico, $\dot{\gamma}$, encontrando-se relacionados da seguinte forma

$$\dot{\alpha} = \dot{\gamma} H(\sigma, A) \quad (2.14)$$

onde σ e A são, respectivamente, o tensor das tensões e o tensor de forças termodinâmicas de endurecimento do material.

Associado a cada modelo constitutivo elasto-plástico encontramos uma função de potencial de escoamento, $\Psi(\sigma, A)$ (de Sousa Neto, Peric, & Owen, 2008). É com base neste potencial que o módulo de endurecimento é obtido,

$$H = - \frac{\partial \Psi(\sigma, A)}{\partial A} \quad (2.15)$$

Note-se que, embora H seja denominado por “módulo”, em termos genéricos, este parâmetro consiste num tensor.

Em simulações de comportamento de materiais, em particular metais dúcteis, o potencial de escoamento é igual tipicamente à função de cedência.

$$\Psi \equiv \Phi \quad (2.16)$$

Nestes casos, os modelos são denominados por “associativos”. Desta forma, pode-se escrever o módulo generalizado de endurecimento da seguinte forma:

$$\mathbf{H} = - \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} \quad (2.17)$$

Por sua vez, a evolução das variáveis de endurecimento podem ser escritas do seguinte modo:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\dot{\gamma} \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} \quad (2.18)$$

Alguns materiais são considerados perfeitamente plásticos, isto é, a tensão mantém-se constante para crescentes valores de deformação (de Sousa Neto, Peric, & Owen, 2008). Isto implica que a função de cedência do material se mantenha inalterada, independentemente do nível de deformação a que o material se encontra submetido.

Todavia, são poucos os materiais que apresentam este tipo de comportamento. A grande maioria dos materiais utilizados em construções mecânicas apresenta um claro encruamento e, em processos de conformação plástica (forjamento, embutidura, etc), este efeito não pode ser desprezado. A variação da superfície de cedência devido ao encruamento de um material pode ser classificada de três formas distintas:

- a) **Modelo de encruamento isotrópico.** A superfície de cedência subsequente, provocada por um incremento de deformação plástica, é exclusivamente uma expansão uniforme da superfície de cedência precedente. Este modelo tem como principal vantagem a sua simplicidade (Fig. 2.4.a). Porém, não permite representar alguns aspectos reais do comportamento de alguns materiais, nomeadamente o efeito de Bauschinger. Este efeito consiste na dependência que a tensão de cedência possui em função do sentido de carregamento (tracção ou compressão) encontrando-se representado na Figura 2.3;
- b) **Modelo de encruamento cinemático.** A superfície de cedência mantém a mesma forma para um incremento de deformação plástica, no entanto, translada como um corpo rígido. Este modelo, inicialmente apresentado por Prager, permite modelar o comportamento do efeito de Bauschinger, bastante visível em materiais sujeitos a regimes de carregamento cíclico. Para a introdução deste efeito de encruamento é necessário introduzir o tensor com as tensões de retorno, $\boldsymbol{\beta}$ ("back stresses") (Zienkiewicz & Taylor, 2005). Em termos gerais, um modelo constitutivo com endurecimento cinemático é descrito da seguinte forma; (Fig. 2.4.b).

$$\Phi(\boldsymbol{q}, k) = f(\boldsymbol{q}) - \sigma_Y(k) = 0 \quad (2.19)$$

onde

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta} \quad (2.20)$$

- c) **Modelo de encruamento distorcional.** Este modelo resulta da combinação dos modelos anteriores, admitindo a expansão, a translação e rotação da superfície de cedência, ou inclusive a mudança de forma.

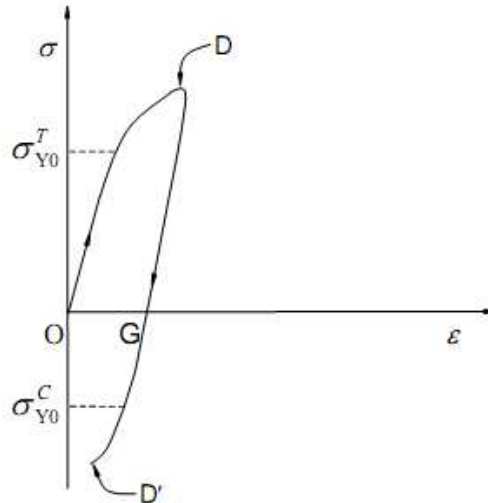


Figura 2.3 - Representação do efeito de Bauschinger (Natal Jorge & Dinis, 2004).

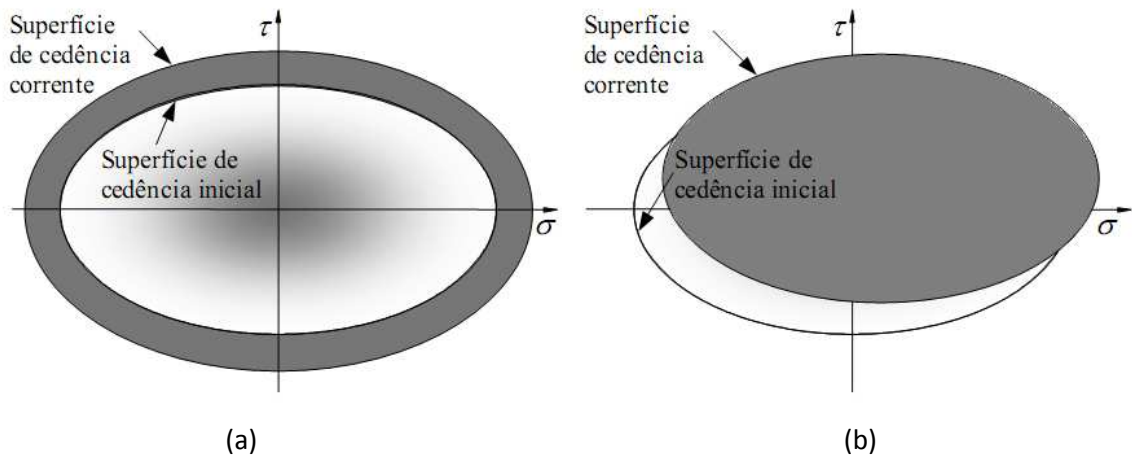


Figura 2.4 - Modelos de encruamento. a) Modelo de encruamento isotrópico; b) Modelo de encruamento cinemático (Natal Jorge & Dinis, 2004).

Considerando apenas o endurecimento isotrópico, existem duas formas de aproximação para qualquer variável de endurecimento (Zienkiewicz & Taylor, 2005). Se α for dependente da deformação plástica acumulada, $\bar{\epsilon}^p$, estamos perante um endurecimento por deformação – $\alpha = \alpha(\bar{\epsilon}^p)$. Neste caso, a deformação plástica acumulada reflecte todo o percurso do processo de deformação. Porém, caso α seja dependente do trabalho plástico, estamos perante um endurecimento energético – $\alpha = \alpha(w^p)$.

2.3.3. Lei do Escoamento

A lei de escoamento é obtida a partir de um potencial de escoamento, $\Psi(\sigma, A)$. Esta função escalar permite determinar os incrementos de deformação plástica por derivação parcial em ordem aos diversos componentes do tensor das tensões,

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} N(\sigma, A) \quad (2.21)$$

onde N consiste no vector de fluxo definido da seguinte forma:

$$N = \frac{\partial \Psi(\sigma, A)}{\partial \sigma} \quad (2.22)$$

No caso de um escoamento associativo, a equação (2.21) reescreve-se do seguinte modo:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \frac{d\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.23)$$

A expressão anterior consiste na regra de escoamento da deformação plástica que usualmente é utilizada em modelos constitutivos para caracterização do comportamento de metais. A lei associativa, para além de evitar a definição de uma função de potencial de escoamento, $\Psi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$ que cumpra os requisitos termodinâmicos, garante a condição de normalidade, ou seja, o vector de fluxo, \mathbf{N} , é normal à superfície de cedência em qualquer ponto do espaço das tensões.

2.4. Método dos Elementos Finitos (MEF)

Apresentados os conceitos fundamentais dos modelos Elasto-Plásticos, nesta secção serão introduzidas algumas ferramentas matemáticas para a resolução de problemas de deformação de sólidos.

Um dos métodos mais eficazes para a resolução deste tipo de problemas é o “*Método dos Elementos Finitos*” (**MEF**). Este método é relativamente recente (década de 70); no entanto, com o “boom” dos computadores, teve um crescimento exponencial, sendo hoje em dia uma ferramenta indispensável em indústrias como a aeronáutica, automóvel, etc, permitindo resolver problemas extremamente complexos com geometrias e condições de fronteira diversas. O sucesso deste método deve-se à discretização do espaço de integração. Desta forma, um espaço de integração complexo é dividido em elementos finitos no qual, devido à sua simplicidade geométrica, são facilmente estabelecidas funções de interpolação que satisfazem as equações que regem o problema.

O método dos elementos finitos é caracterizado por três passos (Zienkiewicz, Taylor, & Zhu, 2005):

- i. **Formulação integral do problema.** Existem vários métodos para descrever o problema de uma forma integral, tais como o método dos deslocamentos, o método dos resíduos pesados e os métodos variacionais;
- ii. **Discretização do problema.** Esta discretização é efectuada quer no espaço quer no tempo;
- iii. **Resolução do sistema de equações que resultam dos dois passos anteriores.** Caso o problema seja linear, a resolução do sistema de equações é directa, bastando para isso a utilização, por exemplo, do método de Gauss. Porém, em problemas não lineares (como é o caso de problemas associados a grandes deformações de sólidos) é necessário utilizar métodos iterativos, como por exemplo o método de *Newton-Raphson*.

Os problemas que se pretendem estudar no âmbito desta tese consistem em problemas mecânicos não lineares em regime “quase-estático”, onde os efeitos de inércia são desprezáveis. Embora seja possível utilizar qualquer método para descrever o problema de uma forma integral, o método considerado ao longo deste trabalho foi o método dos deslocamentos. Este, com base num campo de deslocamentos permite caracterizar totalmente um sólido (campo de tensões e deformações) de uma forma simples e compacta (Zienkiewicz & Taylor, 2005) (de Sousa Neto, Peric, & Owen, 2008). Nas secções seguintes, apresentam-se os três passos que caracterizam o **MEF**.

2.4.1. Formulação integral – Método dos deslocamentos

A base deste método consiste em determinar um campo de deslocamentos \mathbf{u} que pertença ao espaço dos deslocamentos admissíveis, \mathcal{K} , através da resolução da equação seguinte (de Sousa Neto, Peric, & Owen, 2008):

$$\int_{\Omega} [\boldsymbol{\sigma}(\nabla^s \mathbf{u}) : \nabla^s \boldsymbol{\eta} - \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta}] dv - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta} da = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^1 \quad (2.24)$$

Na expressão anterior \mathbf{b} corresponde às forças por unidade de volume e \mathbf{t} às forças exteriores por unidade de área. Por sua vez, $\boldsymbol{\eta}$ representa o campo de deslocamentos virtuais. Note-se que a equação anterior resulta da aplicação do teorema dos trabalhos virtuais à equação diferencial de equilíbrio de forças de um sólido. Da equação anterior é possível calcular um campo de tensões, $\boldsymbol{\sigma}$, sendo este dependente do campo de deslocamentos, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$

2.4.2. Discretização no espaço

A discretização no espaço consiste na substituição de um espaço contínuo, por um conjunto de pequenos sub-espaços denominados de elementos finitos.

$$\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}^d \quad (2.25)$$

$$\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^d \quad (2.26)$$

$$\Omega \rightarrow \Omega^d \quad (2.27)$$

\mathcal{V} e Ω consistem respectivamente no espaço dos deslocamentos virtuais e no domínio do problema. Por sua vez, d indica que os respectivos espaços encontram-se discretizados.

No interior de cada elemento finito (ou sub-espaço) as variáveis associadas ao problema (tensões, deformações, etc) são determinadas por interpolação. Para tal efeito, definem-se funções de forma para cada nó do elemento finito. Estas funções necessitam de cumprir os seguintes requisitos:

- A função de forma do nó i terá de ser igual ao 1 quando a coordenada em análise é o próprio nó;

$$N_i^e(\mathbf{x}^i) = 1 \quad (2.28)$$

- A função de forma do nó i terá de ser igual a 0 quando a coordenada em análise corresponde a outro nó do elemento;

$$N_i^e(\mathbf{x}^j) = 0 \quad (2.29)$$

- O somatório das n funções de forma determinadas num ponto interior ao elemento terá de ser igual a 1;

¹ $\nabla^s(*)$ indica o cálculo do gradiente simétrico de $(*)$

$$\sum_{i=1}^n N_i^e(\mathbf{x}) = 1 \quad (2.30)$$

- As funções de forma no interior do elemento terão de ser contínuas.

Tendo por base a definição das funções de forma, qualquer função $a(\mathbf{x})$ poderá ser interpolada no interior do elemento em função dos valores dos nós do respectivo elemento da seguinte forma:

$$a(\mathbf{x})^d = \sum_{i=1}^{n_{\text{nós}}} a^i N_i^e(\mathbf{x}) \quad (2.31)$$

No caso do domínio total, Ω^d o processo de cálculo de $a(\mathbf{x})^d$ é similar:

$$a(\mathbf{x})^d = \sum_{i=1}^{n_{\text{pontos}}} a^i N_i^g(\mathbf{x}) \quad (2.32)$$

Neste caso, $N_i^g(\mathbf{x})$ representa a função interpoladora global relativa ao nó i . Num problema de dimensão n_{dim} a matriz de interpolação global do problema define-se da seguinte forma (de Sousa Neto, Peric, & Owen, 2008):

$$\mathbf{N}^g(\mathbf{x}) = [\text{diag}[N_1^g(\mathbf{x})] \quad \text{diag}[N_2^g(\mathbf{x})] \quad \dots \quad \text{diag}[N_{n_{dim}}^g(\mathbf{x})]] \quad (2.33)$$

onde n_{dim} consiste na dimensão do problema e $\text{diag}[N_i^g(\mathbf{x})]$ consiste numa matriz diagonal de dimensão $n_{dim} \times n_{dim}$.

$$\text{diag}[N_i^g(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} N_i^g & & & 0 \\ 0 & N_i^g & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & N_i^g \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Tendo por base o mesmo raciocínio, facilmente obtemos o vector global, quer para os deslocamentos \mathbf{u} , quer para os deslocamentos virtuais $\boldsymbol{\eta}$

$$\mathbf{u} = [u_1^1, \dots, u_{n_{dim}}^1, \dots, u_1^{n_{\text{pontos}}}, \dots, u_{n_{dim}}^{n_{\text{pontos}}}]^T \quad (2.35)$$

$$\boldsymbol{\eta} = [\eta_1^1, \dots, \eta_{n_{dim}}^1, \dots, \eta_1^{n_{\text{pontos}}}, \dots, \eta_{n_{dim}}^{n_{\text{pontos}}}]^T \quad (2.36)$$

A interpolação de \mathbf{u}^d e de $\boldsymbol{\eta}^d$ num ponto qualquer pertencente aos domínios discretizados $(\mathcal{K}^d, \mathcal{V}^d, \Omega^d)$ é obtido por:

$$\mathbf{u}^d = \mathbf{N}^g \mathbf{u} \quad (2.37)$$

$$\boldsymbol{\eta}^d = \mathbf{N}^g \boldsymbol{\eta} \quad (2.38)$$

O operador $\nabla^s(*)$ na equação (2.24) em termos discretos é substituído pela matriz das deformações \mathbf{B} . Matriz esta que, para estados planos de tensão e de deformação, apresenta a seguinte configuração

$$\mathbf{B}^g = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^g}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial N_{n_{\text{pontos}}}^g}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^g}{\partial x_2} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{n_{\text{pontos}}}^g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1^g}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1^g}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N_{n_{\text{pontos}}}^g}{\partial x_2} & \frac{\partial N_{n_{\text{pontos}}}^g}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Substituindo as relações definidas anteriormente em (2.24) e, após alguma manipulação matemática, pode-se escrever

$$\left\{ \int_{\Omega^d} [(\mathbf{B}^g)^T \boldsymbol{\sigma} - (\mathbf{N}^g)^T \mathbf{b}] dv - \int_{\partial\Omega_t^d} (\mathbf{N}^g)^T \mathbf{t} da \right\} \boldsymbol{\eta} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^d \quad (2.40)$$

A equação anterior não é mais do que a versão discretizada da equação integral do problema em análise (Eq. (2.24)). Esta equação, de acordo com o teorema dos trabalhos virtuais, terá de ser admissível para qualquer deslocamento virtual. Note-se que o deslocamento virtual é sempre diferente de zero e, como tal, permite-nos escrever a seguinte relação:

$$\int_{\Omega^d} [(\mathbf{B}^g)^T \boldsymbol{\sigma} - (\mathbf{N}^g)^T \mathbf{b}] dv - \int_{\partial\Omega_t^d} (\mathbf{N}^g)^T \mathbf{t} da = 0 \quad (2.41)$$

A equação anterior consiste no equilíbrio de forças num sólido,

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}^{ext} = 0 \quad (2.42)$$

onde $\mathbf{f}^{int}(\mathbf{u})$ e \mathbf{f}^{ext} consistem, respectivamente, nas forças internas e externas do problema, sendo definidas da seguinte forma:

$$\mathbf{f}^{int} = \int_{\Omega^d} (\mathbf{B}^g)^T \boldsymbol{\sigma} dv \quad (2.43)$$

$$\mathbf{f}^{ext} = \int_{\Omega^d} (\mathbf{N}^g)^T \mathbf{b} dv + \int_{\partial\Omega_t^d} (\mathbf{N}^g)^T \mathbf{t} da \quad (2.44)$$

Computacionalmente, verifica-se que não é eficiente calcular as matrizes globais $(\mathbf{N}^g, \mathbf{B}^g)$. De forma a evitar este problema, todos os cálculos são efectuados elemento a elemento e, posteriormente, são assemblados no vector/tensor global.

$$\mathbf{f}^{int} = \text{Assemb}_{e=1}^{n_{\text{elem}}}(\mathbf{f}_e^{int}) \quad (2.45)$$

$$\mathbf{f}^{ext} = \text{Assemb}_{e=1}^{n_{\text{elem}}}(\mathbf{f}_e^{ext}) \quad (2.46)$$

Nas equações anteriores, f_e^{int} e f_e^{ext} são as forças internas e externas respectivamente, relativas ao elemento finito. Estas forças são determinadas recorrendo às equações (2.47) e (2.48).

$$f_e^{int} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B})^T \boldsymbol{\sigma} dv \quad (2.47)$$

$$f_e^{ext} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{N})^T \mathbf{b} dv + \int_{\partial\Omega_t^e} (\mathbf{N})^T \mathbf{t} da \quad (2.48)$$

Uma vez mais, no caso de estado plano de tensão ou de deformação, as matrizes \mathbf{B} e \mathbf{N} , relativas exclusivamente ao elemento finito, apresentam a seguinte configuração:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial N_{n_{nó}}^e}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial x_2} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{n_{nó}}^e}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1^e}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N_{n_{nó}}^e}{\partial x_2} & \frac{\partial N_{n_{nó}}^e}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = [\text{diag}[N_1^e(\mathbf{x})] \quad \text{diag}[N_2^e(\mathbf{x})] \quad \dots \quad \text{diag}[N_{n_{nó}}^e(\mathbf{x})]] \quad (2.50)$$

Quadratura de Gauss

A Quadratura de Gauss é o método por excelência utilizado em algoritmos de elementos finitos para a resolução numérica dos integrais das equações (2.47) e (2.48) (de Sousa Neto, Peric, & Owen, 2008) (Zienkiewicz, Taylor, & Zhu, 2005).

Este método substitui o cálculo analítico dos integrais por um somatório dos valores da função a integrar em n_{Gauss} pontos de Gauss,

$$\int_{\Pi} f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \approx \sum_{i=1}^{n_{Gauss}} w_i f(\boldsymbol{\xi}_i) \quad (2.51)$$

onde $\boldsymbol{\xi}_i$ consiste nas coordenadas dos pontos de integração no domínio Π e w_i consiste nos respectivos pesos de integração. Caso a função a integrar seja polinomial, o resultado obtido via numérica será exactamente o mesmo que o analítico, desde que se utilize um número de pontos de integração suficiente. Com n pontos de Gauss, obtém-se o valor exacto do integral de um polinómio de grau $2n - 1$ ou inferior.

O domínio de integração poderá apresentar inúmeros limites de integração (a geometria de um elemento finito poderá ser bastante diversa) sendo extremamente complicado defini-los analiticamente. De forma a ultrapassar esta dificuldade, recorre-se a uma mudança de coordenadas do sistema global (x, y, z) para um sistema local (ξ, η, ζ) cujos limites de integração são simples. Desta forma, o integral $\int f(x) dx$ em termos numéricos consiste em:

$$\int f(x) dx = \sum_{i=1}^{n_{Gauss}} g(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_i)) J(\boldsymbol{\xi}_i) \quad (2.52)$$

onde $J(\xi)$ é o determinante da matriz jacobiana, sendo este elemento o elo de ligação entre os dois sistemas de coordenadas, definido da seguinte forma:

$$J(\xi) = \det \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right] \quad (2.53)$$

Note-se que este formalismo de integração numérica pode ser aplicado a qualquer domínio de integração, nomeadamente superfícies e volumes.

As equações (2.47) e (2.48) atrás apresentadas possuindo integrais analíticos poderão ser reescritas da seguinte forma:

$$\mathbf{f}_e^{int} \approx \sum_{i=1}^{n_{Gauss}} w_i^{vol} \mathbf{B}_i^T \boldsymbol{\sigma}_i J_i^{vol} \quad (2.54)$$

$$\mathbf{f}_e^{ext} \approx \sum_{i=1}^{n_{Gauss}} w_i^{vol} \mathbf{N}_i \mathbf{b}_i J_i^{vol} + \sum_{i=1}^{n_{Gauss}} w_i^{front} \mathbf{N}_i^T \mathbf{t}_i J_i^{front} \quad (2.55)$$

2.4.3. Discretização no tempo

No caso de materiais inelásticos, o tensor das tensões $\boldsymbol{\sigma}$ não é exclusivamente dependente do tensor das deformações, $\boldsymbol{\varepsilon}$. Nestes casos, $\boldsymbol{\sigma}$ é dependente da história do carregamento. De forma a retratar esta história, introduz-se um conjunto de variáveis internas, $\boldsymbol{\alpha}$, associadas ao material.

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) \quad (2.56)$$

Para este tipo de problemas é necessário reescrever a equação (2.24) de forma a incluir a dependência de $\boldsymbol{\alpha}$, resultado:

$$\int_{\Omega} [\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) : \nabla^s \boldsymbol{\eta} - \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta}] dv - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta} da = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V} \quad (2.57)$$

Tendo em conta uma vez mais que $\boldsymbol{\eta}$ consiste num deslocamento virtual admissível não nulo, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} [\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) - \mathbf{b}_{n+1}] dv - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t}_{n+1} da = 0 \quad (2.58)$$

Tal como efectuado anteriormente, a equação anterior pode ser discretizada obtendo-se

$$\mathbf{f}_{n+1}^{int}(\mathbf{u}_{n+1}) - \mathbf{f}_{n+1}^{ext} = 0 \quad (2.59)$$

$$\mathbf{f}_{n+1}^{int}(\mathbf{u}_{n+1}) = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) dv \quad (2.60)$$

$$\mathbf{f}_{n+1}^{ext}(\mathbf{u}_{n+1}) = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b}_{n+1} dv + \int_{\partial\Omega_t^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t}_{n+1} da \quad (2.61)$$

onde uma vez mais o resultado da resolução da equação (2.57) consiste num campo de deslocamentos, associado ao incremento $n + 1$.

No caso particular de um carregamento proporcional, o vector de forças externas no instante t_{n+1} é determinado da seguinte forma:

$$\mathbf{b}_{n+1} = \lambda_{n+1} \tilde{\mathbf{b}} \quad (2.62)$$

$$\mathbf{t}_{n+1} = \lambda_{n+1} \tilde{\mathbf{t}} \quad (2.63)$$

onde λ_{n+1} consiste no incremento de carregamento. Face a este tipo de solicitação, as forças externas podem ser escritas da seguinte forma:

$$\mathbf{f}_{n+1}^{ext} = \lambda_{n+1} \bar{\mathbf{f}}^{ext} \quad (2.64)$$

$\bar{\mathbf{f}}^{ext}$ na expressão anterior, consiste no vector de solicitações externas total, no qual se pretende no final do problema atingir, sendo determinado uma única vez no início do problema da seguinte forma

$$\bar{\mathbf{f}}^{ext} = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \tilde{\mathbf{b}} dv + \int_{\partial\Omega_t^e} \mathbf{N}^T \tilde{\mathbf{t}} da \quad (2.65)$$

É com base nestes conceitos de discretização de tempo associado a carregamentos proporcionais que se define o conceito de “pseudo-tempo”. Em termos gerais, a variável tempo é substituída por incremento de deformação ou de carregamentos externos.

Analisando a equação (2.58), verifica-se que esta não apresenta um comportamento linear. Tal como já foi referido no início deste capítulo, existem duas fontes de não-linearidade: o próprio modelo constitutivo do material e a não-linearidade geométrica. Um modelo elasto-plástico é, por si só, um modelo não linear e, como tal, obriga a utilização de ferramentas matemáticas que permitem a sua resolução. No âmbito dos elementos finitos são vários os métodos passíveis de serem utilizados, como é o caso do Método de Newton-Raphson, o Método *Modificado de Newton*, entre outros (Zienkiewicz & Taylor, 2005). Devido à sua boa performance, o Método de *Newton-Raphson* será utilizado neste trabalho.

Método de Newton-Raphson

O método de *Newton-Raphson* consiste num método iterativo, que permite obter taxas de convergência quadrática quando nos aproximamos da solução final. Este método numérico encontra-se totalmente descrito no anexo A.

Importa agora apresentar sobre a forma de “pseudo-código” o método de *Newton-Raphson* que permita de uma forma eficiente resolver a equação (2.58).

Quadro 2.2 - Método de *Newton-Raphson* aplicado a um modelo elasto-plástico (de Sousa Neto, Peric, & Owen, 2008).

Equação a resolver para o instante $n + 1$

$$\mathbf{f}_{n+1}^{int}(\mathbf{u}_{n+1}) - \lambda_{n+1} \mathbf{f}^{ext} = 0$$

Sendo λ_{n+1} conhecido.

I. Cálculo de valores iniciais

$$\mathbf{u}_{n+1}^0 = \mathbf{u}_n$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}_{n+1}^{int}(\mathbf{u}_n) - \lambda_{n+1} \mathbf{f}^{ext}$$

Onde \mathbf{r} consiste no resíduo da equação a resolver.

II. Incrementar o contador das iterações

$$k = k + 1$$

III. Cálculo da Matriz com as derivadas;

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}}$$

O cálculo desta matriz encontra-se sucintamente descrito no Quadro 2.3.

IV. Cálculo do incremento de deslocamento;

$$\mathbf{K}_T \delta \mathbf{u}^k = -\mathbf{r}^{k-1}$$

V. Actualização de deslocamentos

$$\mathbf{u}_{n+1}^k = \mathbf{u}_{n+1}^{k-1} + \delta \mathbf{u}^k$$

VI. Actualização das deformações

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^k = \mathbf{B} \mathbf{u}_{n+1}^k$$

VII. Actualização das tensões e variáveis internas

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^k)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^k = \hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^k)$$

VIII. Cálculo das forças internas

$$\mathbf{f}^{int} = \text{Assemb}(\mathbf{f}_e^{int})$$

IX. Cálculo do Resíduo

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n+1}) - \lambda_{n+1} \mathbf{f}^{ext}$$

X. Avaliar a convergência

Se $\|\mathbf{r}\| \leq \text{tolerância}$, fim das iterações para o incremento $(n + 1)$.

$$(*)_{n+1} = (**)_{n+1}^k$$

Se $\mathbf{r} > \text{tolerância}$, voltar ao item II

No caso de problemas da mecânica dos meios contínuos, a matriz com as derivadas a utilizar no método de *Newton-Raphson* possui significado físico. (tópico III do Quadro 2.2) Esta matriz consiste na matriz de rigidez. No quadro seguinte apresenta-se resumidamente o cálculo desta matriz.

Quadro 2.3 - Cálculo da matriz de rigidez.

I.	Para cada elemento finito e para cada ponto de Gauss determinar a matriz tangente consistente. Esta matriz consiste num tensor de quarta ordem.
	$\mathbf{D} = \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}$
II.	Cálculo da matriz tangente de rigidez para cada elemento
	$\mathbf{K}_T^e = \sum_{i=1}^{n_{Gauss}} w_i \mathbf{J}_i \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i$
III.	Assemblagem da matriz tangente de rigidez final
	$\mathbf{K}_T = \text{Assemb}(\mathbf{K}_T^e)$

2.4.4. Actualização do estado de tensão e variáveis internas

A actualização das tensões e variáveis internas intrínsecas a um modelo constitutivo apresentado no tópico VII do Quadro 2.2 é realizada tendo por base a lei de decomposição do tensor das deformações (Eq. 2.66) e as leis de encruamento (Eq. 2.14) e de escoamento (Eq. 2.21).

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (2.66)$$

Para a resolução destas equações é necessário discretizá-las, podendo-se escrever

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e(t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) - \dot{\gamma} \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t)) \quad (2.67)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \dot{\gamma}(t) \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t)) \quad (2.68)$$

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t)) \leq 0 \quad , \quad \dot{\gamma}(t) \geq 0 \quad , \quad \dot{\gamma}(t) \Phi(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t)) = 0 \quad (2.69)$$

As equações (2.67) e (2.68) são diferenciais e, como tal, é necessário recorrer ao método de *Backward* de Euler descrito no anexo B deste documento para a sua resolução, obtendo-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \Delta \gamma \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) \quad (2.70)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n + \Delta \gamma \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) \quad (2.71)$$

Sujeito às seguintes condições

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) \leq 0 \quad , \quad \Delta \gamma \geq 0 \quad , \quad \Delta \gamma \Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) = 0 \quad (2.72)$$

Onde

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \Big|_{n+1} \quad \mathbf{A}_{n+1} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \Big|_{n+1} \quad (2.73)$$

A resolução do sistema composto pelas equações (2.70) e (2.71) apenas é exigida no caso do material se encontrar em domínio elasto-plástico. Note-se que este sistema é não linear, recorrendo-

se ao método de *Newton-Raphson* para a sua resolução. Porém, em domínio elástico, $\Delta\gamma = 0$, e como consequência a actualização das variáveis internas é directa, ou seja:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.74)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n \quad (2.75)$$

Nas equações (2.70) e (2.74), $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ consiste num incremento de deformação, sendo com base neste incremento que se avalia o domínio onde o material se encontra – domínio *elástico* ou domínio *elasto-plástico*. Numa primeira fase, assume-se que este incremento é totalmente elástico, determinando-se todas as variáveis, denominadas nesta fase por variáveis “tentativa” (“trial”). De seguida com base na função de cedência verifica-se esta hipótese. Se $\Phi \leq 0$, estamos perante um incremento elástico e como tal, as variáveis tentativa são o próprio resultado. Porém, se $\Phi > 0$ há a necessidade de resolver o sistema de equações composto por (2.70) e (2.71).

Este procedimento implícito de actualização de estado denomina-se por “*Return Map Algorithm*”, tendo sido proposto por Wilkins em 1964 (Zienkiewicz & Taylor, 2005). O Quadro 2.4 apresenta este mesmo algoritmo.

Quadro 2.4 - Algoritmo para a actualização das tensões e variáveis internas – “Return Map Algorithm”.

I.	Cálculo das variáveis tentativa
	$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$
	$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\alpha}_n$
	$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \bar{\rho} \left. \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right _{n+1}^{trial}$
	$\mathbf{A}_{n+1}^{trial} = \bar{\rho} \left. \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right _{n+1}^{trial}$
II.	Verificar o domínio
	<i>Se $\Phi \leq 0$ – domínio elástico</i>
	$(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}$
	<i>Se $\Phi > 0$ – domínio elasto – plástico</i>
	<i>Resolução do sistema composto pelas equações 2.70 e 2.71</i>
III.	Fim

2.4.5. Elemento finito quadrático de 8 nós

Ao longo deste trabalho, o elemento finito utilizado nas diversas simulações foi o elemento finito quadrangular de 8 nós, representado na Figura 2.5. Note-se que este elemento finito pertence à família “*Serendipity*” (Zienkiewicz, Taylor, & Zhu, 2005).

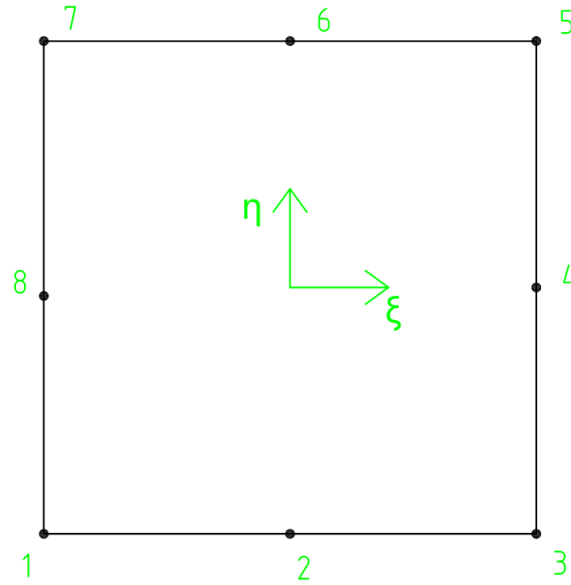


Figura 2.5 - Elemento Finito quadrangular de 8 nós.

Para este elemento e para problemas axissimétricos, o campo de deslocamentos e o campo de deformações num ponto interior do elemento é definido pelas expressões (2.76) e (2.77) respectivamente.

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{r1} \\ u_{z1} \\ \vdots \\ u_{r8} \\ u_{z8} \end{Bmatrix} \quad (2.76)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial z} \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \dots & \frac{N_8}{r} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial z} & \frac{\partial N_8}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{r1} \\ u_{z1} \\ \vdots \\ u_{r8} \\ u_{z8} \end{Bmatrix} \quad (2.77)$$

No caso de problemas em estado plano de deformação as matrizes \mathbf{B} e \mathbf{N} encontram-se definidas na secção 2.4.2. pelas equações (2.49) e (2.50).

2.5. Conclusões

Neste capítulo foram apresentados os principais fundamentos teóricos para a caracterização do comportamento de materiais. Simultaneamente, foram apresentadas as principais ferramentas matemáticas capazes de resolver este tipo de problemas.

Mecânica do Dano Contínuo

3.1. Introdução

A *Mecânica do Dano Contínuo (MDC)* tem como objectivo retratar a degradação microscópica de um material, estabelecendo desta forma uma “ponte” entre a análise microscópica da deterioração interna dos materiais e os modelos de engenharia adequados para o projecto. Ao longo deste capítulo pretende-se apresentar os principais fundamentos teóricos subjacentes à *Mecânica do Dano Contínuo*, bem como os principais modelos propostos na área.

Na secção 3.2, apresentam-se os principais tipos de dano e descrevem-se os mecanismos que promovem a degradação interna de um material e, na secção 3.3, é efectuada uma pequena revisão histórica de como a **MDC** surgiu na comunidade científica. Na mecânica dos meios contínuos, os modelos de dano apresentam um domínio de aplicabilidade, sendo na secção 3.4. que este é apresentado.

Tendo por base aspectos fenomenológicos, na secção 3.5 são apresentados os principais conceitos subjacentes a esta área da mecânica, nomeadamente o conceito de variável de dano (secção 3.5.1) e tensão efectiva (secção 3.5.2). Na secção 3.5.4 são apresentadas as primeiras e elementares leis de evolução do dano, das quais se destaca a lei de dano de fluência de Kachanov (Lemaitre & Chaboche, 1984) (Lemaitre J. , 1990).

Após as primeiras leis elementares de dano, surgiram novos modelos capazes de avaliar a degradação interna de um material em problemas multiaxiais. Dois dos modelos mais utilizados quer pela comunidade científica, quer pela indústria, são os modelos originais de Lemaitre (Lemaitre J. , 1990) e de Gurson (de Sousa Neto, Peric, & Owen, 2008). Embora apresentem formalismos totalmente diferentes, ambos descrevem a degradação interna do material através da introdução de uma variável de dano. No caso particular do modelo de Gurson, a variável de dano consiste na fracção volúmica de cavidades no material, f . Estes dois modelos serão apresentados na secção 3.6.

Para além de contabilizarem a degradação interna de um material, os modelos da Mecânica do Dano Contínuo são muitas vezes utilizados como critérios de fractura. Para cada material, bem como para cada modelo, é definido um valor crítico da variável de dano. Atingido esse valor, assume-se que o material entrou em rotura. Para além desta forma de analisar a rotura, existem publicados na literatura vários indicadores de rotura. Estes critérios apenas indicam onde ocorre a rotura, no entanto, não afectam as propriedades mecânicas do material durante a deformação. Na secção 3.7 são apresentados dois critérios de rotura: critério de Rice e Tracey (Rice & Tracey, 1969) e o critério de *McClintock* (McClintock, 1968).

Na última secção deste documento (secção 3.8) são apresentados dois problemas mecânicos simples e as respectivas soluções analíticas acopladas com uma variável de dano. Com base nas soluções analíticas e no modelo original de Lemaitre, para cada problema procede-se a uma comparação de resultados.

3.2. Classificação do dano

Em termos microscópicos, o dano é caracterizado pela nucleação, crescimento e coalescência de defeitos, levando à perda de capacidade de carga do material. Em termos estruturais o dano pode ser classificado em quatro formas distintas: dano frágil, dano dúctil, dano por fluência e dano por fadiga (Lemaitre J. , 1990).

3.2.1. Dano frágil

O dano frágil ocorre sem a presença de uma componente significativa de deformação plástica, verificando-se uma rápida propagação de fissuras com baixo consumo de energia (Barralis & Maeder, 1997). Comparando ε_{eq}^e e ε_{eq}^p sendo, respectivamente, a deformação equivalente elástica e plástica, verifica-se a seguinte relação:

$$\frac{\varepsilon_{eq}^p}{\varepsilon_{eq}^e} < 1. \quad (3.1)$$

3.2.2. Dano dúctil

Ao contrário do caso anterior, a deformação plástica no dano dúctil é bastante significativa. Com o aumento do nível de deformação plástica junto de interfaces de inclusões, verifica-se o aparecimento de microfissuras e microcavidades, promovendo uma diminuição na capacidade de carga do material e, em casos extremos, levando à rotura da estrutura. Este tipo de dano é sobretudo característico de metais.

3.2.3. Dano por fluência

No dano por fluência, a temperatura apresenta um papel muito importante, sendo um efeito a ter em consideração nomeadamente na análise do comportamento de metais. Quando este tipo de material encontra-se submetido a temperaturas altas (superior a 1/3 da sua temperatura de fusão) apresenta um comportamento viscoplástico, verificando-se a presença de deformações a tensão constante. Este fenómeno deve-se à dependência da deformação com a viscosidade para estas temperaturas.

3.2.4. Dano por fadiga

A fadiga é um fenómeno de rotura progressiva de materiais quando estes se encontram sujeitos a ciclos de carga periódicos ou não. Neste tipo de dano, a formação e crescimento de defeitos intracristalinos não se devem à ordem de grandeza das solicitações, mas apenas ao número de ciclos a que a estrutura é submetida.

Note-se que a evolução e caracterização do dano não se devem exclusivamente às condições de carregamento (solicitações cíclicas ou constantes), efeito da temperatura ou ao tipo de material em análise. Em alguns casos existem outros factores que contribuem significativamente para a degradação de um material como é o caso de factores ambientais (por exemplo, a corrosão e oxidação de metais).

3.3. Mecânica do Dano Contínuo

A mecânica do dano contínuo tem como objectivo a formulação de modelos que permitem descrever a degradação interna de sólidos dentro do contexto da mecânica dos meios contínuos.

Enquanto o dano se manifesta sob a forma de rotura irreversível de ligações atómicas, a deformação pode ser relacionada com variações reversíveis do espaçamento interatómico (a componente elástica do tensor das deformações), e acumulação das deslocações (deformações permanentes/plásticas).

Para moderadas deformações plásticas, a microestrutura é considerada inalterável. Neste caso, a deformação plástica é considerada superior à deformação elástica, no entanto, muito inferior à deformação na rotura. Em muitos casos práticos, esta hipótese é aceitável, existindo nos dias de hoje vários modelos analíticos e numéricos que permitem resolver uma enorme panóplia de problemas. Todavia, quando a deformação plástica presente num corpo contínuo é significativa (por exemplo, quando a deformação aproxima-se da deformação de rotura) a microestrutura é um parâmetro a não desprezar na previsão da rotura e, como consequência, é necessário introduzir nos modelos numéricos novas variáveis que descrevam o dano interno do material (para além das variáveis comuns – deformação plástica acumulada, ...)

A inicialização de uma micro-fenda deve-se à acumulação do dano (Lemaitre J. , 1990) (Lemaitre & Chaboche, 1984). Em termos microscópicos, este dano encontra-se associado à nucleação, crescimento e coalescência de cavidades. Macroscopicamente, a degradação do material surge como uma diminuição da rigidez, ductilidade e capacidade de carga.

Na mecânica do dano contínuo, a deterioração interna de um material é efectuada por uma variável interna denominada por “*dano*”. Esta variável interna é dependente da direcção, ou seja, anisotrópica e, como tal, é definida sob a forma de um tensor (Lemaitre J. , 1990). No entanto, a utilização de uma variável interna sob a forma de um tensor acarreta enormes dificuldades no seu tratamento matemático. Face a estas dificuldades, os modelos de dano mais utilizados nos dias de hoje recorrem a uma simplificação da variável de dano, considerando esta como uma entidade isotrópica e escalar. É óbvio que o resultado final não é tão preciso quando comparado com um modelo cuja variável de dano consiste numa entidade tensorial. Porém, na análise de dano interno de materiais considerados isotrópicos como é o caso dos metais, os resultados obtidos com uma variável de dano escalar são interessantes e válidos.

O *dano* deverá ser distinguido da ductilidade e deformação na fractura. Ao contrário da deformação, que se trata de uma entidade tangível, o dano não é mais do que uma quantidade interna que descreve a degradação do material em função de outros parâmetros e que dificilmente poderá ser medido directamente.

3.3.1. Um pouco de história

Desde há longos anos que se têm aplicado esforços para compreender a rotura de materiais macroscopicamente. Um dos pioneiros, foi Leonardo da Vinci que tentou relacionar a fractura com as variáveis mecânicas (Lemaitre & Chaboche, 1984). Posteriormente, personalidades como Tresca, von Mises, Coulomb e Mohr, apresentaram algumas funções dependentes da tensão e deformação para caracterizar a fractura em elementos de volume (Lemaitre & Chaboche, 1984). Porém, a introdução do efeito do dano no comportamento de um material foi uma evolução relativamente recente. Em 1958, Kachanov (Kachanov, 1958) publicou o primeiro modelo da mecânica do dano contínuo, no

qual, introduzia uma variável escalar, de forma a descrever o colapso de metais por fluência quando estes se encontravam sujeitos a cargas uniaxiais.

Posteriormente, nos anos 70, surgiram novos modelos de dano contínuo, onde Lemaitre, Chaboche, Murakami, Gurson, Cordebois tiveram um papel fundamental (Lemaitre & Chaboche, 1984). Entre todos os desenvolvimentos na caracterização do dano em materiais dúcteis, destaca-se a introdução da pressão hidrostática, a não linearidade da evolução do dano e o enfraquecimento induzido no material pelo dano. Por outras palavras, introduziu-se o efeito do primeiro e segundo invariante do tensor das tensões. O primeiro invariante corresponde à tensão hidrostática. O segundo invariante consiste na tensão equivalente de von Mises, permitindo avaliar a componente desviadora das tensões.

Nos dias de hoje, procura-se introduzir o efeito do terceiro invariante das tensões na caracterização do dano, bem como efeitos de corte. São vários os estudos publicados que, com base em ensaios experimentais indicam, que o dano é fortemente dependente do ângulo de “Lode” que é traduzido pelo terceiro invariante das tensões. Um dos pioneiros nesta área é Wierzbicki (Bai, Bao, & Wierzbicki, 2006), (Bao & Wierzbicki, 2004).

3.4. Domínio de validade e de utilização

Apenas os materiais isentos de defeitos internos intrínsecos aos processos de fabrico não se encontram sujeitos a dano. Todavia, esta hipótese de um “material perfeito” à escala microscópica é extremamente irrealista. É por este motivo que a Mecânica do Dano Contínuo é amplamente utilizada, sobretudo pelas indústrias de ponta, e um tema bastante focado pela comunidade científica.

A teoria do dano descreve a evolução dos defeitos internos desde o estado inicial (estado virgem) até ao aparecimento de uma fenda macroscópica (Fig. 3.1) (Lemaitre & Chaboche, 1984). Para um dado elemento de volume de uma estrutura, conhecendo a história da tensão-deformação, as leis do dano permitem por integração (no tempo ou pseudo-tempo) conhecer a evolução do dano até ocorrer a inicialização de uma fissura macroscópica (Lemaitre & Chaboche, 1984).

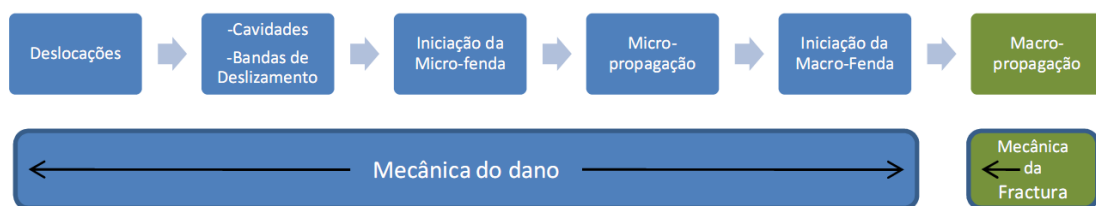


Figura 3.1. Campo de aplicação da Mecânica do dano contínuo.

3.5. Aspectos fenomenológicos

A caracterização do dano por uma variável é, por si só, um problema complexo. Tal como foi referido na secção 3.3, o dano interno de um material dificilmente é medido, sendo praticamente impossível distinguir macroscopicamente um material virgem de um material danificado. Porém, é fundamental a definição de uma variável que, de uma forma coerente, quantifique a degradação interna de um material. Existem várias formas de definir a variável *dano* dependendo da escola de pensamento e do tipo de medida do dano (Lemaitre & Chaboche, 1984). Entre as várias formas para a definição desta variável ressaltam as seguintes:

- i. Medição à escala microscópica de variáveis associadas com o dano, como por exemplo a fracção volúmica de cavidades, que poderão ser integradas ao longo do volume macroscópico da estrutura recorrendo a técnicas matemáticas de homogeneização (Lemaitre & Chaboche, 1984). Um exemplo desta abordagem consiste na fracção volúmica de cavidades que Gurson apresenta no seu modelo micromecânico;
- ii. Medida das variáveis mecânicas globais (modificação das propriedades de elasticidade, como por exemplo o módulo de Young). Esta abordagem é relativamente simples de interpretar, bastando para isso introduzir o conceito de tensão efectiva introduzido por Rabotnov em 1963 (Lemaitre & Chaboche, 1984).

3.5.1. Definição da variável de dano

Considere-se uma estrutura sujeita a dano, da qual é isolado um elemento representativo de volume, cujas dimensões são claramente superiores às dimensões das heterogeneidades do meio. Seja S a área de uma secção do elemento de volume identificado pela normal \vec{n} . Em S , as heterogeneidades associadas ao dano (cavidades, fendas) apresentam diferentes formas. Tendo em conta a área destes defeitos, a concentração de tensões na vizinhança de descontinuidades geométricas, e as interações entre defeitos vizinhos, define-se a área resistente efectiva \tilde{S} que considera todos estes efeitos.

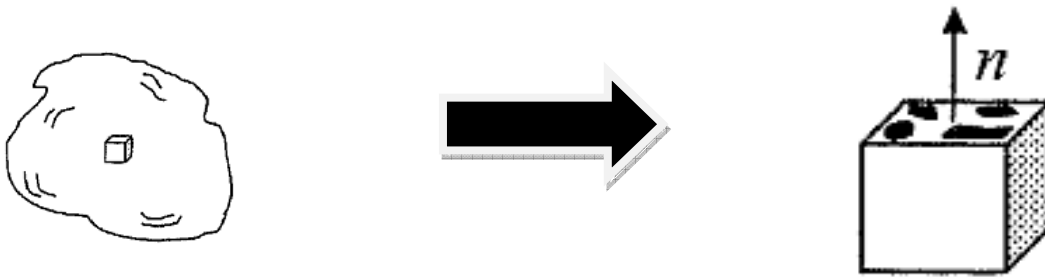


Figura 3.2 - Elemento de volume representativo danificado (Lemaitre J. , 1990).

Considerando S e \tilde{S} , é possível definir a área total dos vestígios de defeitos corrigida para a concentração de tensões, S_D :

$$S_D = S - \tilde{S} \quad (3.2)$$

Por definição,

$$D_n = \frac{S_D}{S} \quad (3.3)$$

é a medida mecânica do dano segundo a normal \vec{n} , sendo esta variável escalar (Lemaitre J. , 1990), (Lemaitre & Chaboche, 1984). Em termos físicos, a variável de dano D_n pode ser entendida como uma área relativa (ou corrigida) de defeitos perpendicular à direcção \vec{n} . Porém, em termos matemáticos, quando S tende para um ponto (tende para zero), a variável D_n corresponde à densidade superficial (corrigida) de descontinuidades da matéria no plano normal a \vec{n} . Assim sendo, pode-se desde já definir os seguintes casos particulares:

$$\begin{cases} D_n = 0 & \text{Material virgem, isento de dano} \\ D_n = 1 & \text{Verifica-se a ruptura do elemento de volume em duas partes no plano perpendicular a } \vec{n} \\ 0 < D_n < 1 & \text{Caracteriza o nível de dano} \end{cases}$$

Num caso geral, no qual considera-se dano anisotrópico, verifica-se que os defeitos associados à variável D_n apresentam direcções preferenciais. Neste caso a variável de dano poderá ser representada por um tensor de quarta ordem (Lemaitre & Chaboche, 1984).

Hipótese de isotropia

Esta hipótese considera que as fendas e cavidades encontram-se distribuídas uniformemente em todas as direcções. Face a este pressuposto, a variável de dano não depende da direcção \vec{n} definida anteriormente, sendo representa pelo escalar D , de tal forma que (Lemaitre & Chaboche, 1984),

$$D = D_n \quad \forall \vec{n} \quad (3.4)$$

3.5.2. Tensão efectiva

Definição

A tensão efectiva em termos reais não é mais do que a tensão calculada para a secção que efectivamente resiste a esforços. Esta tensão é dependente da variável de dano, D .

A forma mais simples de definir a tensão efectiva é considerar um estado uniaxial de tensão. Seja P a carga a que um elemento de volume encontra-se sujeito e seja σ a respectiva tensão convencional definida por $\sigma = P/S$. Considerando um dano isotrópico, D , e a definição de área resistente efectiva,

$$\tilde{S} = S - S_D = S(1 - D) \quad (3.5)$$

define-se a tensão efectiva $\tilde{\sigma}$ da seguinte forma (Lemaitre & Chaboche, 1984):

$$\tilde{\sigma} = \sigma \frac{S}{\tilde{S}} \quad \text{ou} \quad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (3.6)$$

verificando-se, como é evidente, que a tensão efectiva $\tilde{\sigma}$ é superior à tensão convencional σ . É também importante ter em conta o seguinte aspecto:

$$\begin{cases} \tilde{\sigma} = \sigma & \text{Material isento de dano} \\ \tilde{\sigma} \rightarrow \infty & \text{Momento da fractura} \end{cases}$$

Considerando uma vez mais a hipótese de dano isotrópico, a relação $\frac{S}{\tilde{S}}$ não é dependente da orientação \vec{n} podendo-se escrever o tensor das tensões efectivas da seguinte forma:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (3.7)$$

Princípio da equivalência da deformação

Este princípio foi proposto por Lemaitre e Chaboche (Lemaitre J. , 1990), de forma a evitar uma análise micromecânica para cada tipo de defeito e para cada tipo de dano. Este princípio refere o seguinte:

“Any strain constitutive equation for damaged material may be derived in the same way as for a virgin material except that the usual stress is replaced by the effective stress.” (Lemaitre J. , 1990)

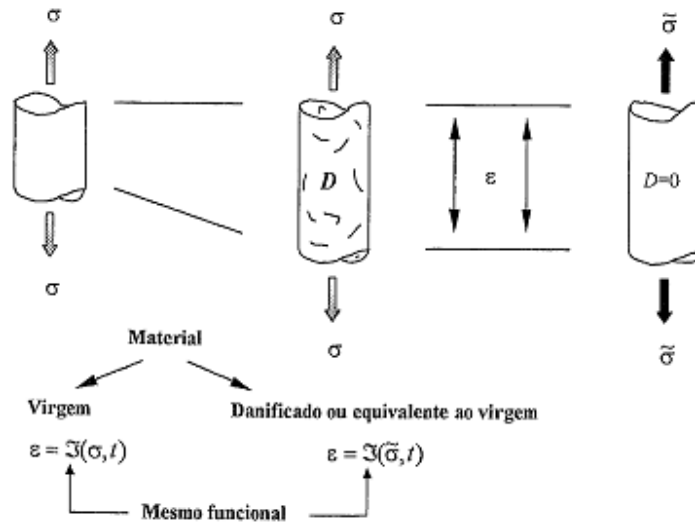


Figura 3.3 – Princípio da equivalência da deformação (Lemaitre & Chaboche, 1984).

Considerando uma vez mais o caso de um estado de tensão uniaxial, a deformação elástica é definida por:

$$\varepsilon^e = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1 - D)E} \quad (3.8)$$

onde E consiste no módulo de Young. Note-se que esta hipótese é discutível, na medida em que considera o efeito de dano nos diferentes comportamentos (elástico, plástico) igual. Todavia, este pressuposto é coerente e eficiente (Lemaitre & Chaboche, 1984).

Dano crítico

Tendo por base o conceito de tensão efectiva no instante da rotura por descoesão interatómica, é possível definir um dano crítico, D_c . De acordo com este conceito, quando $D = D_c$, ocorre a formação de uma macro-fenda, levando o material à rotura.

Considerando uma vez mais um estado de tensão uniaxial, o dano crítico é definido da seguinte forma:

$$D_c = 1 - \frac{\sigma_u}{\tilde{\sigma}_u} \quad (3.9)$$

onde $\tilde{\sigma}_u$ corresponde à tensão uniaxial de rotura por descoesão e σ_u a tensão de fractura convencional. Para os materiais comuns (metais por exemplo) $\tilde{\sigma}_u$ apresenta valores compreendidos entre $[\frac{E}{100}; \frac{E}{250}]$ enquanto, D_c , no caso de metais vulgarmente utilizados em construções mecânicas, apresenta valores compreendidos entre 0.15 a 0.5 (Lemaitre & Desmorat, 2005).

3.5.3. Medidas do dano

A variável D não se trata de um parâmetro tangível e, como tal, é necessário encontrar uma forma de a caracterizar fisicamente. O método seleccionado para avaliar D encontra-se associado com a forma como é definida esta variável. Tendo em conta os pressupostos assumidos nas secções precedentes (variável dano baseada no conceito de tensão equivalente e acoplada com a hipótese de equivalência de deformação), uma das formas mais simples e amplamente utilizada é associar a variável de dano à alteração das propriedades físicas dos materiais, tais como, o módulo de elasticidade, o coeficiente de Poisson, entre outros.

Variação do módulo de elasticidade

Reconsideremos a equação (3.8) reescrita da seguinte forma:

$$\sigma = E(1 - D)\varepsilon^e \quad (3.10)$$

A partir da equação anterior, é possível definir o módulo de elasticidade do material sujeito a dano, \tilde{E} :

$$\tilde{E} = E(1 - D) \quad (3.11)$$

Conhecendo o módulo de elasticidade inicial, é possível avaliar o dano associado a um determinado carregamento,

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E} \quad (3.12)$$

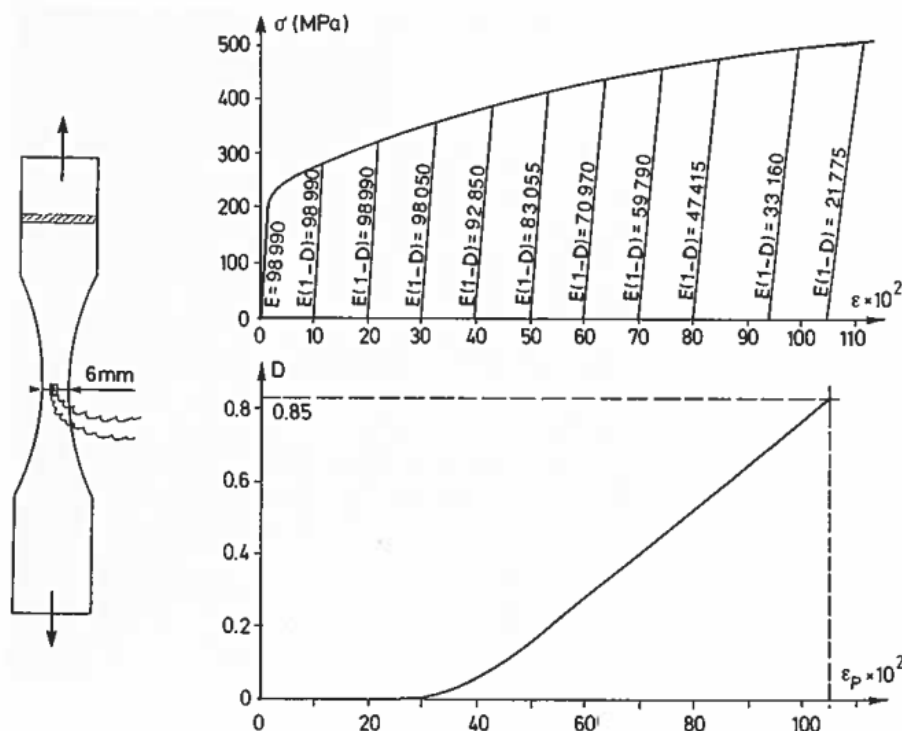


Figura 3.4 - Medição do dano pela variação do módulo de Young (Lemaitre & Chaboche, 1984).

Alguns modelos, nomeadamente o modelo de Lemaitre (Lemaitre J. , 1990) e de Chaboche (Lemaitre & Chaboche, 1984), utilizam a degradação do módulo de elasticidade para quantificar macroscopicamente o efeito do dano. Esta degradação pode ser analisada recorrendo a um ensaio de tracção, tal como é descrito na Figura 3.4. Embora este processo de quantificar o dano seja simples de se efectuar, é necessário ter algumas precauções, devido à forte localização do dano. Na referência (Lemaitre & Chaboche, 1984) estes cuidados encontram-se devidamente especificados.

3.5.4. Leis elementares do dano

Definida e caracterizada a variável de dano, apresentam-se alguns modelos empíricos para a quantificação da degradação interna de um material. Estes modelos são básicos e elementares, sendo aplicáveis exclusivamente a ensaios uniaxiais.

Equação de dano dúctil plástico, linear em termos de deformação

Para muitos materiais metálicos, submetidos a uma carga uniaxial constante, o dano D varia linearmente com a deformação. A expressão seguinte, retrata este caso:

$$D = D_c \left\langle \frac{\varepsilon - \varepsilon_D}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} \right\rangle \quad (3.13)$$

onde ε_D é a deformação efectiva a partir da qual se verifica a evolução de D , ε_R é a deformação efectiva na rotura e D_c é o valor do dano na rotura. Note-se que D_c , ε_D e ε_R consistem em três constantes intrínsecas a cada material, encontrando-se tabeladas para diversos materiais em (Lemaitre & Chaboche, 1984).

Lei de dano de fluência de Kachanov

Esta lei apresentada em 1958 por Kachanov é exclusiva a domínios viscoplásticos, ou seja, quando a temperatura apresenta um papel importante no comportamento do material,

$$\dot{D} = \left[\frac{\sigma_v}{A_0(1-D)} \right]^{r_0} \quad (3.14)$$

onde A_0 e r_0 são dois coeficientes característicos do dano de fluência dependentes do tipo de material, e σ_v a tensão efectiva. Da expressão anterior resultam valores nulos ou quase nulos para a fluência primária e secundária². Sobre esta expressão efectuaram-se vários testes experimentais, provando a sua aplicabilidade sobretudo em casos que possuem histórias de carregamentos simples (Lemaitre & Chaboche, 1984).

O tempo de rotura num ensaio de fluência a carga constante, é obtida pela solução da equação diferencial de movimento do modelo para um valor de dano igual ao valor crítico, $D = D_c$, com as seguintes condições iniciais: $D = 0$ e $t = 0$.

$$t_c = \frac{1 - (1 - D_c)^{r_0+1}}{r_0 + 1} \left(\frac{\sigma_v}{A_0} \right)^{-r_0} \quad (3.15)$$

² Existem três estágios de fluência. No primeiro estágio, denominado por fluência primária, a taxa da deformação diminui com o tempo. No segundo estágio (fluência secundária) a deformação evolui linearmente com o tempo, sendo esta fase a maior parte da vida de uma estrutura. No último estágio (fluência terciária) a taxa de evolução da deformação aumenta até à rotura do material (Barralis & Maeder, 1997).

3.5.5. Critérios multiaxiais do dano

A transposição de um modelo de dano uniaxial para multiaxial é efectuada de uma forma similar aos critérios de plasticidade. Para problemas acoplados com dano, é definida uma superfície limite de dano, definida da seguinte forma:

$$\Phi_D(\sigma, D) = 0 \quad (3.16)$$

onde σ é o tensor das tensões e D a variável de dano. Quando $\Phi < 0$, não ocorre a degradação interna do material ($D = 0$). Note-se que o critério definido anteriormente para caracterizar a evolução do dano tem por base o tensor das tensões, no entanto, é possível definir uma superfície de dano em função do tensor das deformações (Lemaitre & Chaboche, 1984).

3.6. Modelos Particulares

Nesta secção apresentam-se dois modelos constitutivos acoplados com dano. Tratam-se dos modelos originais de Lemaitre (Lemaitre J., 1990) e de Gurson (Gurson, 1977), que são vulgarmente implementados em *softwares* comerciais de Elementos Finitos (MEF).

3.6.1. Modelo de Lemaitre

O modelo de Lemaitre é possivelmente o modelo mais conhecido e mais utilizado no domínio da Mecânica do Dano Contínuo (MDC). O grande sucesso deste modelo deve-se ao facto de ter sido desenvolvido partindo de um potencial termodinâmico, cumprindo-se assim os princípios fundamentais da termodinâmica.

Em termos básicos, Lemaitre, considerando um modelo de plasticidade, bem como uma variável de dano e de endurecimento isotrópica, definiu a sua função de cedência da seguinte forma:

$$\Phi(\sigma, R, D) = \frac{\sigma_{eq}}{1 - D} - \sigma_y(R) \leq 0 \quad (3.17)$$

onde σ_{eq} consiste na tensão equivalente de von Mises e R a variável de endurecimento isotrópica. Como é fácil de constatar, a forma como a função de cedência foi definida não constitui um grande passo nesta área de investigação. A grande contribuição de Lemaitre foi a definição da evolução da variável de dano, \dot{D} , em função de um potencial termodinâmico, ϕ_D^* . Foi com base neste potencial termodinâmico, que Lemaitre apresentou um modelo que é termodinamicamente válido. A equação (3.18) apresenta a evolução do dano, \dot{D} , onde $\dot{\lambda}$ consiste no multiplicador plástico, Y na taxa de libertação de energia elástica e $\dot{\epsilon}^p$ na taxa de deformação plástica acumulada, definida pela equação 3.19. Relativamente a s_0 e S_0 , consistem em constantes que deverão ser calibradas para cada material.

$$\dot{D} = -\dot{\lambda} \frac{\partial \phi_D^*}{\partial Y} = \frac{\dot{\lambda}}{1 - D} \left(-\frac{Y}{S_0} \right)^{s_0} = \left(-\frac{Y}{S_0} \right)^{s_0} \dot{\epsilon}^p \quad (3.18)$$

$$\dot{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{3}{2} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p} \quad (3.19)$$

A taxa de libertação de energia elástica pode ser escrita em função da tensão equivalente de von Mises, σ_{eq} , e em função da tensão hidrostática, σ_H , tal como se apresenta na equação (3.20).

$$-Y = \frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1-D)^2} \left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] \quad (3.20)$$

Como é possível verificar, Y é dependente do coeficiente de triaxialidade definido por $\Gamma = \sigma_H/\sigma_{eq}$. Introduzindo a equação (3.20) na equação (3.18), obtemos uma evolução para variável de dano que é válida para qualquer tipo de solitação.

$$\dot{D} = \left\{ \frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1-D)^2 S_0} \left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] \right\}^{S_0} \dot{\epsilon}^p \quad (3.21)$$

3.6.2. Modelo de Gurson

Um dos modelos micromecânicos mais significativos para representar o dano progressivo de um material é o Modelo de Gurson. Este modelo, no qual estabelece a ligação entre a plasticidade do material e a acumulação do dano, permite prever a perda de resistência do material, devido ao crescimento de cavidades esféricas internas num material, simulando assim os defeitos cristalinos. O sólido no qual este modelo é aplicável é poroso, dilatável, sensível à tensão hidrostática e apresentando um comportamento elasto-plástico contínuo (*“pressure-sensitive elasto-plastic continuum”*).

O sucesso do modelo de Gurson deve-se à introdução de uma nova função de cedência, no qual, é governada pelo primeiro e segundo invariante da tensão e pela variável de dano f , na qual representa a fracção volúmica da cavidade.

$$\Phi(\sigma, k, f) = J_2(s) - \frac{1}{3} \left(1 + f^2 - 2f \cosh \left[\frac{3p}{2(\sigma_{y0} + k)} \right] \right) (\sigma_{y0} + k)^2 = 0 \quad (3.22)$$

Na equação (3.22). $J_2(s)$ consiste no segundo invariante do tensor desviador das tensões, p a pressão hidrostática, σ_{y0} a tensão de cedência do material e k a variável de encruamento (de Sousa Neto, Peric, & Owen, 2008). O primeiro termo da equação anterior descreve o comportamento homogéneo do elemento, enquanto os dois restantes contabilizam a variação da resistência em função da fracção volúmica. Ao contrário do modelo de Lemaitre, a variável de dano (fracção volúmica, f) no modelo de Gurson não se encontra directamente associada ao mecanismo dissipativo mas sim à lei da conservação de massa.

Note-se que no caso limite da fracção volúmica igual a zero, a função de cedência do modelo de Gurson transforma-se no modelo de von Mises.

Lei de evolução da fracção volúmica

Tal como já foi referido, a lei de evolução da fracção volúmica foi obtida considerando a lei de conservação de massa. Simultaneamente consideram-se dois pressupostos:

- i. O material é considerado plasticamente incompressível (tal como em von Mises).

ii. Despreza-se a deformação elástica volumétrica.

A densidade de um material poroso, ρ , pode ser definida da seguinte forma:

$$\rho = \rho_m v_m \quad (3.23)$$

onde ρ_m consiste na densidade da matriz do material e v_m o volume da matriz do material por unidade de volume. Relacionando v_m com f sabe-se que:

$$v_m + f = 1 \quad (3.24)$$

Considerando as duas equações anteriores pode-se escrever:

$$\rho = \rho_m(1 - f) \quad (3.25)$$

Diferenciando a equação anterior relativamente ao tempo, obtemos

$$(1 - f)\dot{\rho}_m = \dot{\rho} + \rho_m \dot{f} \quad (3.26)$$

Tendo por base os dois pressupostos referidos anteriormente, verifica-se que a evolução da densidade da matriz do material é nula, ou seja:

$$\dot{\rho}_m = 0 \quad (3.27)$$

Substituindo as equações (3.27) e (3.25) em (3.26) pode-se escrever:

$$\dot{f} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho}(1 - f) \quad (3.28)$$

De acordo com a conservação de massa, a evolução da deformação volumétrica é definida pelo seguinte coeficiente:

$$\dot{\epsilon}_v = -\frac{\dot{\rho}}{\rho} \quad (3.29)$$

Considerando uma vez mais o segundo pressuposto, $\dot{\epsilon}_v$ apenas contempla a componente plástica.

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_v^p \quad (3.30)$$

Desta forma,

$$\dot{f} = (1 - f)\dot{\epsilon}_v^p \quad (3.31)$$

Considerando o modelo associativo, a taxa do tensor das deformações plásticas é definida por

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = \dot{\gamma} \left[s + \frac{1}{3} D(k + \sigma_{y0}) \sinh \left[\frac{3p}{2(k + \sigma_{y0})} \right] I \right] \quad (3.32)$$

Tendo por base esta relação, a equação (3.31) escreve-se da seguinte forma

$$\dot{f} = \dot{\gamma} (f - f^2) (k + \sigma_{y0}) \sinh \left(\frac{3p}{2(k + \sigma_{y0})} \right) \quad (3.33)$$

Ao contrário de Lemaitre, a evolução da variável de dano ocorre exclusivamente em domínio plástico.

Segundo Gurson, a perda de capacidade de carga do material ocorre quando $f = 1$, que consiste numa consideração irrealista e sobredimensionada de acordo com várias observações experimentais. Para além disto, este modelo tem sido criticado pelo facto de não possuir arranque próprio, ou seja, é necessário conhecer qual a porosidade inicial do material. Este parâmetro não é facilmente conhecido, dependendo de vários aspectos, nomeadamente os processos de fabrico utilizados na concepção do produto. Face a estes dados, surgiram várias extensões deste modelo, das quais se ressalta o modelo de Gurson-Tvergaard-Needleman.

3.6.2.1. Modelo de Gurson-Tvergaard-Needleman

De forma a tornar o modelo de Gurson mais realístico, Tvergaard e Needleman introduziram na equação inicial de Gurson os parâmetros q_1 , q_2 e converteram a fracção volúmica f numa função $f^*(f)$. Estas alterações tiveram como objectivo introduzir no modelo original de Gurson o efeito de nucleação, crescimento e coalescência de vazios (Tvergaard, 1981) (Tvergaard, 1982) (Tvergaard & Needleman, 1984). A equação seguinte apresenta a função de cedência do modelo **GTN**:

$$\Phi(\sigma, k, f^*) = J_2(s) - \frac{1}{3} \left(1 + f^{*2} - 2f^* \cosh \left[\frac{3p}{2(\sigma_{y0} + k)} \right] \right) (\sigma_{y0} + k)^2 = 0 \quad (3.34)$$

Segundo Tvergaard, os resultados são optimizados considerando $q_1 = 1.5$ e $q_2 = 1$.

Numa primeira fase, a evolução da fracção volúmica é caracterizada apenas pelo crescimento e nucleação de cavidades.

$$\dot{f} = \dot{f}_{\text{crescimento}} + \dot{f}_{\text{nucleação}} \quad (3.35)$$

A baixa temperatura, a nucleação de cavidades é controlada pela deformação plástica e em materiais homogéneos, a nucleação de cavidades inicia-se a baixas deformações. Dada a complexidade das estruturas dos materiais, verifica-se que a nucleação no interior de um sólido não é uniforme. Tendo por base esta dificuldade em definir onde e como ocorre a nucleação de cavidades, $\dot{f}_{\text{nucleação}}$ foi definida tendo por base uma distribuição normal (Eq. 3.36).

$$\dot{f}_{\text{nucleação}} = A_N \dot{\varepsilon}_p \quad (3.36)$$

onde $\bar{\varepsilon}^p$ consiste na deformação plástica acumulada e A_N é definido da seguinte forma:

$$A_N = \frac{F_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon_N}{s_N} \right)^2 \right\} \quad (3.37)$$

Na equação (3.37), s_N e ε_N representam o desvio padrão e valor médio respectivamente da distribuição normal da deformação plástica acumulada e F_N corresponde à fracção volúmica de cavidades que poderá ser nucleada.

A componente de $\dot{f}_{crescimento}$ é descrita pela seguinte equação

$$\dot{f}_{crescimento} = (1 - f) \dot{\varepsilon}_v \quad (3.38)$$

onde $\dot{\varepsilon}_v$ consiste na taxa de deformação volumétrica associada à variação de volume do material.

Quando as cavidades atingem um determinado volume, verifica-se a interacção entre os diversos vazios. Este fenómeno é denominado por coalescência. Atingido um determinado valor de f , inicia-se a coalescência das cavidades, provocando uma diminuição da capacidade de carga do material. De forma a introduzir o efeito de coalescência de cavidades, Tvergaard e Needleman (Xue, 2007) introduziram a função f^* descrita da seguinte forma:

$$f^*(f) = \begin{cases} f, & \text{se } f \leq f_{cr} \\ f_{cr} + \frac{\frac{1}{q_1} - f_{cr}}{f_f - f_{cr}} (f - f_{cr}), & \text{se } f_{cr} \leq f \leq f_f \end{cases} \quad (3.39)$$

onde f_{cr} consiste no valor crítico da fracção volúmica a partir do qual ocorre coalescência e f_f o valor da fracção volúmica na rotura do material.

O modelo apresentado tem sido amplamente aplicado na resolução numérica de problemas de fractura em estado plano de deformação e axissimétrico. No entanto, apresenta algumas limitações que é conveniente referir:

- O modelo de GTN não considera efeitos de corte, obtendo-se resultados completamente irrealistas em solicitações de corte puro. Em estado de corte puro, a pressão hidrostática mantém-se constante, não se verificando a evolução da variável de dano;
- A variável de dano presente reduz-se apenas à fracção volúmica, f . A acumulação de dano consiste num processo mais complexo que a evolução da fracção volúmica de um material;
- Os parâmetros materiais utilizados neste modelo são obtidos por considerações microscópicas, sendo bastante difícil obter valores correctos e precisos.

3.7. Critérios de Fractura

Para além dos modelos constitutivos acoplados com variáveis introduzidas para caracterizar o dano, como são o caso dos modelos de Lemaitre e de Gurson, existem critérios de rotura ou indicadores de fractura, que simplesmente indicam a ocorrência de rotura. Na comunidade científica existe uma linha ténue a separar os modelos de dano com os critérios de fractura. Há quem considere que estamos perante um modelo de dano quando as propriedades mecânicas de um material são enfraquecidas ao longo de um carregamento, e um critério de rotura (ou indicador de rotura) quando uma variável auxiliar exclusivamente quantifica o estado de tensão, não interferindo

no modelo que caracteriza o comportamento do material. Porém, há precisamente o oposto, ou seja, mesmo que a variável em causa não interfira na lei de endurecimento do material, trata-se de uma variável de dano.

Não entrando nesta enorme discussão, apresenta-se a título de exemplo, dois indicadores de rotura (ou duas variáveis de dano).

3.7.1. Critério de Rice e Tracey

Este critério, apresentado em 1969 (Rice & Tracey, 1969), analisa a evolução de defeitos esféricos no interior de um material dúctil para a caracterização da fractura. O seu desenvolvimento teve por base o princípio variacional de Rayleigh-Ritz em função do quociente entre a velocidade de deformação média do raio da esfera (defeito) e a velocidade de deformação remota imposta. Em termos matemáticos, este critério apresenta-se sobre a forma de um integral:

$$I_R = \int_{R_0}^{R_c} \frac{dR}{R} = \int_0^{\bar{\epsilon}_{rot}^p} 0.283 \exp\left(\frac{\sqrt{3}\sigma_H}{2\sigma_{eq}}\right) d\bar{\epsilon}^p \quad (3.40)$$

onde R_0 é o raio inicial do defeito, R o raio efectivo do defeito, σ_H a tensão hidrostática e σ_{eq} a tensão equivalente. A fractura ocorre quando um valor adimensional do tamanho da cavidade atinge um valor crítico. Como é possível verificar pela expressão anterior, este critério é dependente do coeficiente de triaxialidade, Γ , definido pelo coeficiente entre a tensão hidrostática, σ_H e a tensão equivalente de von Mises, σ_{eq} .

Este modelo apresenta duas limitações: primeiro, o modelo foi estabelecido para materiais perfeitamente plásticos, embora os autores afirmem ser possível obter boas estimativas para as velocidades de crescimento de cavidades nos aços ferríticos; a segunda deve-se ao facto do modelo avaliar o comportamento de um defeito (esfera) isoladamente, não incluindo o efeito de coalescência entre os diversos poros.

3.7.2. Critério de McClintock

Em 1968, McClintock propôs um novo critério de fractura dúctil, considerando que o material apresenta-se dividido em células que possuem furos cilíndricos de directriz elíptica (McClintock, 1968).

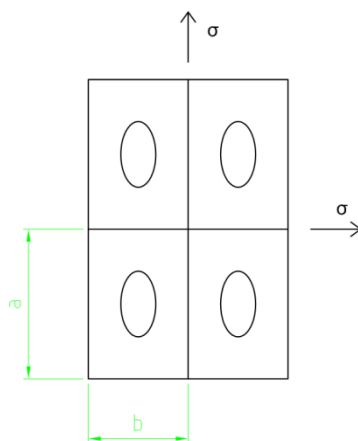


Figura 3.5 - Geometria considerada por McClintock no seu modelo de fractura.

Tal como em 3.7.1, este critério é matematicamente definido por um integral descrito pela expressão seguinte.

$$I_{MC} = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\log F_{zb}^f} \left[\frac{\sqrt{3}}{2(1-n)} \left(\frac{\sqrt{3}(1-n)(\sigma_a + \sigma_b)}{2\sigma_{eq}} \right) + \frac{3}{4} \frac{\sigma_a - \sigma_b}{\sigma_{eq}} \right] d\varepsilon_{eq}^p \quad (3.41)$$

$\log(F_{zb}^f)$ consiste na máxima deformação admissível da célula, σ_a e σ_b são as tensões principais na matriz do material “sem poros” na direcção dos semi-eixos dos furos, σ_{eq} a tensão equivalente, ε_{eq}^p a deformação plástica equivalente, n o expoente de endurecimento do material.

Analisando alguns ensaios de tracção Hancock e Mackenzie (Andrade Pires, 2001), constataram que a soma das tensões principais segundo os semi-eixos dos poros pode ser substituída pela tensão hidrostática, surgindo nas duas equações anteriores o coeficiente de triaxialidade ($\Gamma = \sigma_H/\sigma_{eq}$). Porém, quanto à subtracção de $\sigma_a - \sigma_b$, verificaram que poderia ser desprezado. Tendo por base esta análise, o critério de McClintock transforma-se num modelo semelhante ao proposto por Rice e Tracey.

3.8. Exemplos analíticos

Nesta última secção, apresentam-se algumas soluções analíticas de problemas muito simples, onde é tida em conta a degradação interna do material e os respectivos resultados associados à simulação utilizando o modelo original de Lemaitre.

Os problemas foram simulados num código de elementos finitos denominado “*Hyplas*”. Trata-se de um código implícito de pequenas e grandes deformações para sólidos elásticos, elasto-plásticos e hiperelásticos, codificado em *Fortran 90*. Este código possui implementado o modelo original de Lemaitre apenas para estado plano de deformação e axissimétrico. Uma vez que o efeito de dano se encontra inevitavelmente associado a grandes deformações, todos os ensaios numéricos apresentados neste documento foram realizados considerando deformações finitas (de Sousa Neto, Peric, & Owen, 2008).

3.8.1. Selecção de Material

A selecção do material a utilizar em testes numéricos assentou nos seguintes pressupostos:

- Material metálico dúctil;
- Materiais cujas propriedades mecânicas e constantes do modelo constitutivo a utilizar encontrem-se acessíveis.

Face a estes dois pressupostos, o material seleccionado foi a liga de Alumínio 2024 – T351. Esta liga é amplamente utilizada nos dias de hoje pela indústria de ponta, nomeadamente a indústria aeroespacial, aeronáutica e automóvel, caracterizando-se por elevadas resistências mecânicas, baixa densidade, e alta resistência à fadiga.

Simultaneamente, este material tem sido alvo de grandes estudos no campo da mecânica de dano contínuo e mecânica da fractura (Xue, 2007) (Bai, 2008) (Teng, 2008) (Bao & Wierzbicki, 2004) (Bai, Bao, & Wierzbicki, 2006) (Bao, 2003), existindo alguma informação quer experimental quer numérica do seu comportamento mecânico.

Uma vez que se pretende utilizar o modelo de Lemaitre, para além das propriedades mecânicas (módulo de Young, coeficiente de Poisson) são necessários o denominador S_0 , o expoente s , e o dano crítico, D_c . Após a análise das diversas fontes, apenas em (Teng, 2008) estes parâmetros são apresentados. Porém, o valor indicado para o dano crítico é $D_c = 0.8$. Este valor parece ser extremamente elevado, isto porque, é um valor próximo da unidade. Tal como já foi referido na secção 3.5.2, o dano crítico para metais varia entre 0.15 e 0.5 sendo indicado para ligas de alumínio um dano crítico $D_c = 0.23$. Este valor parece ser mais consensual e, como tal, foi adoptado para as simulações efectuadas.

A tabela seguinte apresenta os diversos parâmetros necessários para a caracterização da liga 2024 – T351 Al.

Tabela 3.1. Propriedades Mecânicas da liga de alumínio 2024 – T351.

Descrição	Valor	Fonte	Considerações
Módulo de Young, E	72.4 [GPa]	(Teng, 2008)	
Coeficiente de Poisson, ν	0.33	(Teng, 2008)	
Tensão de Cedência, σ_{y0}	352 [MPa]	(Teng, 2008)	
Tensão Máxima, σ_u	814 [MPa]	(Matweb)	
Deformação na plástica na rotura, ϵ_{pr}	0.19	(Matweb)	
Dano crítico, D_c	0.23	(Teng, 2008)	
Expoente de Lemaitre, s	1	(Teng, 2008)	
Denominador de Lemaitre, S_0	6 [MPa]	(Teng, 2008)	
Deformação plástica limite a partir da qual ocorre a evolução do dano, ϵ_D^p	0	-	Por questões de simplificação, assume-se que a evolução do dano inicia-se a partir do momento em que se verifique a presença de deformação plástica. Este tipo de simplificação é amplamente utilizado. Para além disto, o modelo de Lemaitre implementado no HYPLAS assume que $\epsilon_{pd} = 0$
Curva de encruamento, $\sigma(\bar{\epsilon}^p)$	$352 + 853.4\bar{\epsilon}^{0.66}$ [MPa]	(Teng, 2008)	

3.8.2. Pressurização interna de um cilindro

O primeiro problema aqui apresentado, consiste na pressurização interna de um cilindro. Pretende-se, de uma forma simples e compacta, obter uma solução analítica que permita determinar a pressão à qual ocorre a rotura. Ao longo da formulação serão consideradas algumas simplificações. Relativamente à estrutura propriamente dita, importa desde já realçar os seguintes pressupostos:

- O cilindro é considerado longo, com parede fina, comparativamente com o raio médio, R_{cil} .
- O cilindro entra em colapso quando se verifica a iniciação de uma fenda macroscópica. A iniciação da fenda é contabilizada pelo dano crítico, D_c .

A figura seguinte apresenta o cilindro em análise.

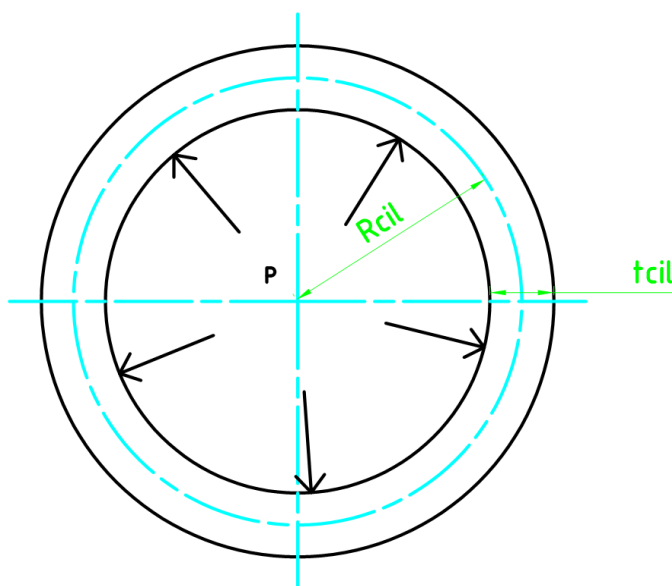


Figura 3.6 - Dimensões do cilindro.

3.8.2.1. Solução analítica

Considerando coordenadas cilíndricas (r, θ, z) e sendo P a pressão interna, o tensor das tensões define-se da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \approx 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{PR_{cil}}{t_{cil}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{PR_{cil}}{2t_{cil}} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

onde t_{cil} consiste na espessura da parede do cilindro. Para este estado de tensão, a tensão hidrostática é dada por:

$$\sigma_H = \frac{PR_{cil}}{2t_{cil}} \quad (3.43)$$

Por sua vez, o tensor das tensões desviadoras escreve-se da seguinte forma

$$\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} -\frac{PR_{cil}}{2t_{cil}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{PR_{cil}}{2t_{cil}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Tendo por base s a tensão equivalente de von Mises é dada pela equação (3.45).

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{PR_{cil}}{t_{cil}} \quad (3.45)$$

Definida a tensão hidrostática e equivalente, facilmente se determina o coeficiente de triaxialidade, Γ . Neste caso particular, $\Gamma = 1/\sqrt{3} \approx 0.5773$.

Considerando um carregamento proporcional, monotónico e de acordo com Lemaitre (Lemaitre & Desmorat, 2005) pode-se escrever:

$$\bar{\epsilon}_r^p = \bar{\epsilon}_D^p + D_c \left(\frac{\sigma_u^2 R_v}{2ES_0} \right)^{-s} = \epsilon_D^p + (\epsilon_R^p + \epsilon_D^p) R_v^{-s} \quad (3.46)$$

onde ϵ_D^p e ϵ_R^p consistem, respectivamente, na deformação plástica a partir da qual verifica-se a evolução do dano e a deformação plástica na rotura em estado uniaxial. Por sua vez, $\bar{\epsilon}_D^p$ e $\bar{\epsilon}_r^p$ correspondem, respectivamente, à deformação plástica acumulada a partir da qual verifica-se a evolução do dano, e a deformação plástica acumulada na iniciação da fenda. R_v consiste na função de triaxialidade definida pela equação (3.47).

$$R_v = \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu)\Gamma^2 = \frac{5 - 4\nu}{3} \quad (3.47)$$

Analisando a equação (3.46), verifica-se que ela não é mais do que uma forma simples que resultou da manipulação da equação (3.21) para estabelecer uma ponte entre as propriedades de ensaios uniaxiais e multiaxiais.

Considerando a superfície de cedência de von Mises acoplada com a variável de dano e uma regra de encruamento que possui como variável de endurecimento a deformação plástica acumulada, pode-se escrever:

$$\Phi = \frac{\sigma_{eq}}{1 - D} - (\sigma_{y0} + A\bar{\epsilon}^{pn}) \quad (3.49)$$

$$\frac{\sigma_{eq}}{1 - D} = (\sigma_{y0} + A\bar{\epsilon}^{pn}) \quad (3.50)$$

Reescrevendo a equação anterior em função do parâmetro de endurecimento $\bar{\epsilon}^p$ resulta

$$\bar{\epsilon}^p = \left(\frac{\sigma_{eq}}{(1 - D)A} - \frac{\sigma_{y0}}{A} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.51)$$

Ocorrerá a iniciação de uma fenda para uma determinada deformação plástica acumulada, $\bar{\epsilon}_r^p$ associada a um dano crítico:

$$\bar{\epsilon}_r^p = \left(\frac{\sigma_{eq}}{(1 - D_c)A} - \frac{\sigma_{y0}}{A} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.52)$$

Substituindo a equação (3.52) em (3.46) resulta

$$\left(\frac{\sigma_{eq}}{(1 - D_c)A} - \frac{\sigma_{y0}}{A} \right)^{\frac{1}{n}} = \epsilon_D^p + (\epsilon_R^p - \epsilon_D^p) R_v^{-s} \quad (3.53)$$

Considerando as equações (3.45) e (3.47), e após alguma manipulação algébrica obtém-se a expressão para a pressão crítica.

$$P_c = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{t_{cil}}{R_{cil}} A(1 - D_c) \left[\frac{\sigma_{y0}}{A} + \left(\epsilon_D^p + (\epsilon_R^p - \epsilon_D^p) \left(\frac{5 - 4\nu}{3} \right)^{-s} \right)^n \right] \quad (3.54)$$

3.8.2.2. Solução Numérica

A figura seguinte apresenta a geometria do cilindro simulado, bem como a malha utilizada. Trata-se de um cilindro com uma espessura de parede de 10 mm e um raio médio de 100 mm. Relativamente à malha utilizada, devido aos eixos de simetria presentes, foi possível apenas simular um quarto do cilindro em estado plano de deformação.

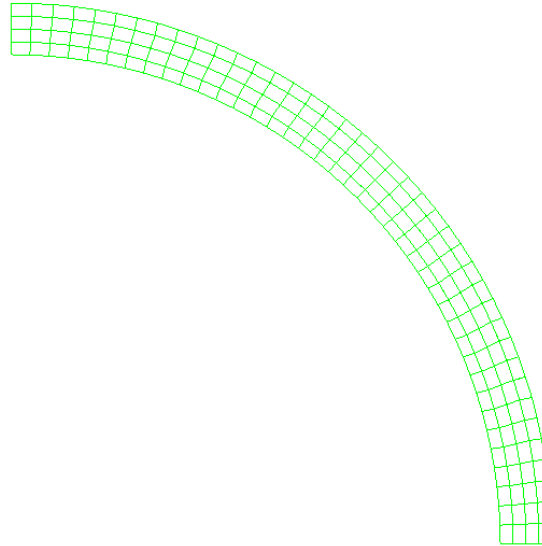


Figura 3.7 - Malha de elementos finitos com 160 elementos para a simulação da pressurização interna de um cilindro.

Face às dimensões do cilindro e às propriedades do material a utilizar, a pressão crítica obtida pela equação (3.54) é igual a 53.44 MPa. Em termos práticos, a rotura ocorre na superfície interior do cilindro. Note-se que, à medida que a pressão interna aumenta, verifica-se a plastificação do interior para o exterior do cilindro. É também ao longo de toda a face interior que se espera obter um dano máximo.

A figura seguinte apresenta a distribuição da variável de dano e da deformação plástica acumulada.

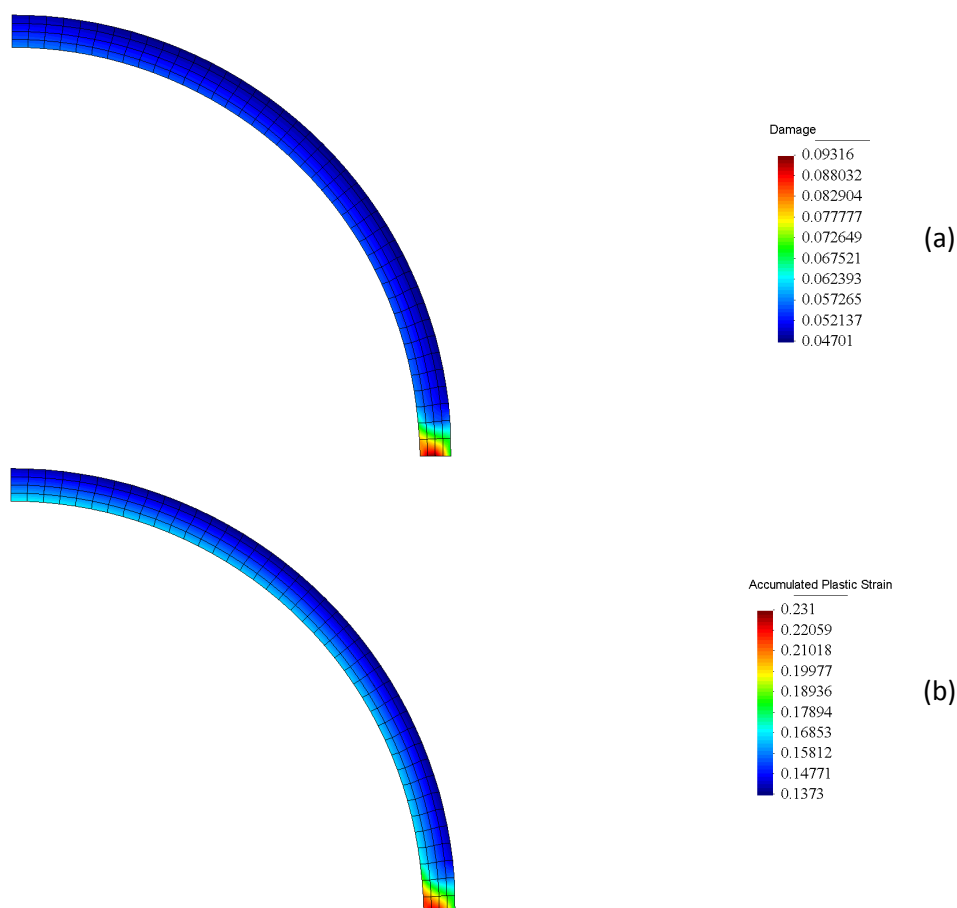


Figura 3.8. Pressurização do cilindro de raio médio $R_{cil} = 100 \text{ mm}$ e espessura $t_{cil} = 10 \text{ mm}$. a) Distribuição da variável de dano; b) Distribuição da deformação plástica acumulada.

Como é possível verificar pelas imagens anteriores, o dano e a deformação plástica acumulada localizam-se num ponto da malha. Note-se que as figuras apresentadas são relativas a um dano ainda muito baixo (0.09316), estando a estrutura ainda longe de atingir o dano crítico. Este resultado vai contra as expectativas iniciais, isto porque, seria de esperar acima de tudo que a deformação plástica acumulada e a variável de dano se encontrassem uniformemente distribuídas ao longo do raio.

Para tentar solucionar este problema, à própria simulação, foram realizadas novos ensaios utilizando outro tipo de elementos, nomeadamente o elemento FBAR³ de 4 nós, no entanto, os resultados foram similares. Estes resultados permitem concluir que a simulação da pressurização de um cilindro é fortemente dependente da malha. Uma possível solução deste problema é acoplar ao modelo simples de Lemaitre um método não local, que permite eliminar a dependência da malha em estados de deformação elevados. Porém, esse trabalho encontra-se fora do âmbito desta tese.

Face aos resultados obtidos, não é possível efectuar uma comparação com os homólogos obtidos via analítica.

3.8.3. Flexão de uma viga

É frequente observarmos a inicialização de pequenas fendas em vigas quando estas são severamente dobradas, levando à sua rotura. De uma forma simples, pretende-se obter uma relação analítica que contabilize o efeito do dano e que permita avaliar o comportamento de uma viga, ao

³ Este elemento comparativamente com um elemento “normal” de 4 nós apresenta um gradiente de deformação alterado de forma a evitar o efeito de retenção volumétrica.

longo de um carregamento. Uma vez mais, a solução analítica será alvo de comparação com o modelo original de Lemaitre implementado no *Hyplas*.

3.8.3.1. Solução Analítica

A base deste modelo analítico consiste em determinar o trabalho plástico tendo em conta o dano associado à deformação plástica.

De acordo com a Teoria da Plasticidade, o trabalho plástico é definido pelo seguinte integral:

$$w^p = \int_0^{\epsilon^p} \sigma d\epsilon^p \quad (3.55)$$

onde σ e ϵ^p correspondem respectivamente ao tensor das tensões e ao tensor das deformações plásticas. Em termos físicos, o trabalho plástico consiste na energia dissipada pelos mecanismos plásticos, não podendo ser recuperada.

Considerando o caso uniaxial o integral anterior reduz-se à seguinte equação:

$$w^p = \int_0^{\epsilon_p} \sigma d\epsilon^p \quad (3.56)$$

onde neste caso, σ e ϵ^p correspondem à tensão uniaxial e à deformação plástica uniaxial respectivamente. Considerando uma vez mais um caso uniaxial, pode-se escrever

$$\Phi = \frac{\sigma}{1-D} - \sigma(\epsilon^p) = 0 \quad (3.57)$$

Tendo por base a mesma lei de endurecimento do exemplo anterior

$$\sigma(r) = \sigma_{y0} + A\epsilon^{pn} \quad (3.58)$$

e tendo em conta a equação (3.57), a tensão uniaxial é definida da seguinte forma:

$$\sigma = (1-D)(\sigma_{y0} + A\epsilon_p^n) \quad (3.59)$$

Admitido que o dano evolui linearmente com a deformação plástica uniaxial, ϵ_p pode-se escrever

$$D = D_c \frac{\epsilon_p}{\epsilon_{pr}} \quad (3.60)$$

onde D_c e ϵ_{pr} consistem no dano crítico e na deformação plástica uniaxial crítica respectivamente no momento da inicialização de uma macro-fenda. Tendo por base a evolução do dano, a equação (3.59) é reescrita da seguinte forma:

$$\sigma = \left(1 - D_c \frac{\epsilon_p}{\epsilon_{pr}}\right)(\sigma_{y0} + A\epsilon_p^n) \quad (3.61)$$

Aplicando a definição de trabalho plástico, resulta:

$$w^p = \int_0^{\epsilon_p} \left(1 - D_c \frac{\epsilon_p}{\epsilon_{pr}} \right) (\sigma_{y0} + A\epsilon_p^n) d\epsilon_p \quad (3.62)$$

Integrado obtém-se:

$$w^p = \sigma_{y0}\epsilon_p + \frac{A\epsilon_p^{n+1}}{n+1} - \frac{D_c\sigma_{y0}\epsilon_p^2}{2\epsilon_{pr}} - \frac{D_cA\epsilon_p^{n+2}}{(n+2)\epsilon_{pr}} \quad (3.63)$$

No caso limite, no ponto de rotura verifica-se que $\epsilon_p = \epsilon_{pr}$, obtendo-se o trabalho plástico crítico neste mesmo ponto, w_r^p :

$$w_r^p = \sigma_{y0}\epsilon_{pr} + \frac{A\epsilon_{pr}^{n+1}}{n+1} - \frac{D_c\sigma_{y0}\epsilon_{pr}^2}{2} - \frac{D_cA\epsilon_{pr}^{n+1}}{(n+2)} \quad (3.64)$$

Note-se que este trabalho é relativo exclusivamente ao ponto onde ocorre a rotura, isto porque, é neste ponto onde D e ϵ_p são máximos.

3.8.3.2. Solução Numérica

Tal como no exemplo anterior, recorreu-se ao modelo original de Lemaitre para simular a flexão de uma viga em estado plano de deformação. A Figura 3.9 apresenta as dimensões da viga simulada.

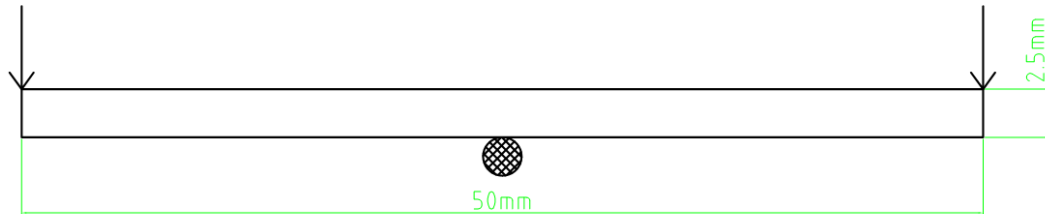


Figura 3.9 - Dimensões da viga simulada.

Face à simetria presente na viga, apenas foi considerado metade da viga, exigindo a introdução de condições de fronteira coerentes. Para este exemplo, foram realizadas utilizadas duas malhas:

- I. Malha com 200 elementos finitos quadráticos de 8 nós com integração reduzida;
- II. Malha com 1000 elementos finitos quadráticos de 8 nós com integração reduzida;

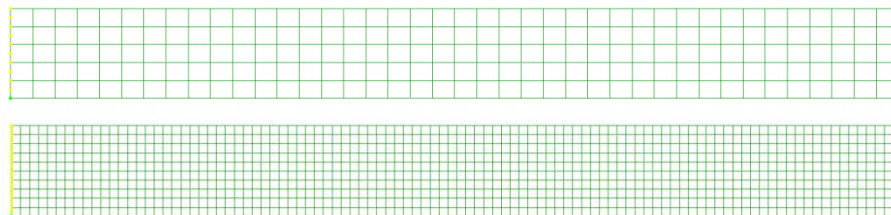


Figura 3.10. Malhas de elementos finitos utilizadas na simulação da flexão de uma viga. a) Malha com 200 elementos finitos; b) Malha com 1000 elementos finitos.

Mais importante do que comparar um único valor obtido via numérica e via analítica no momento da rotura, importa avaliar até que ponto os resultados numéricos se aproximam da solução analítica ao longo de todo o carregamento. Analisando a equação (3.64), verifica-se que esta não é mais do que uma superfície em função da variável de dano e da deformação plástica uniaxial. Esta superfície encontra-se representada na Figura 3.11.

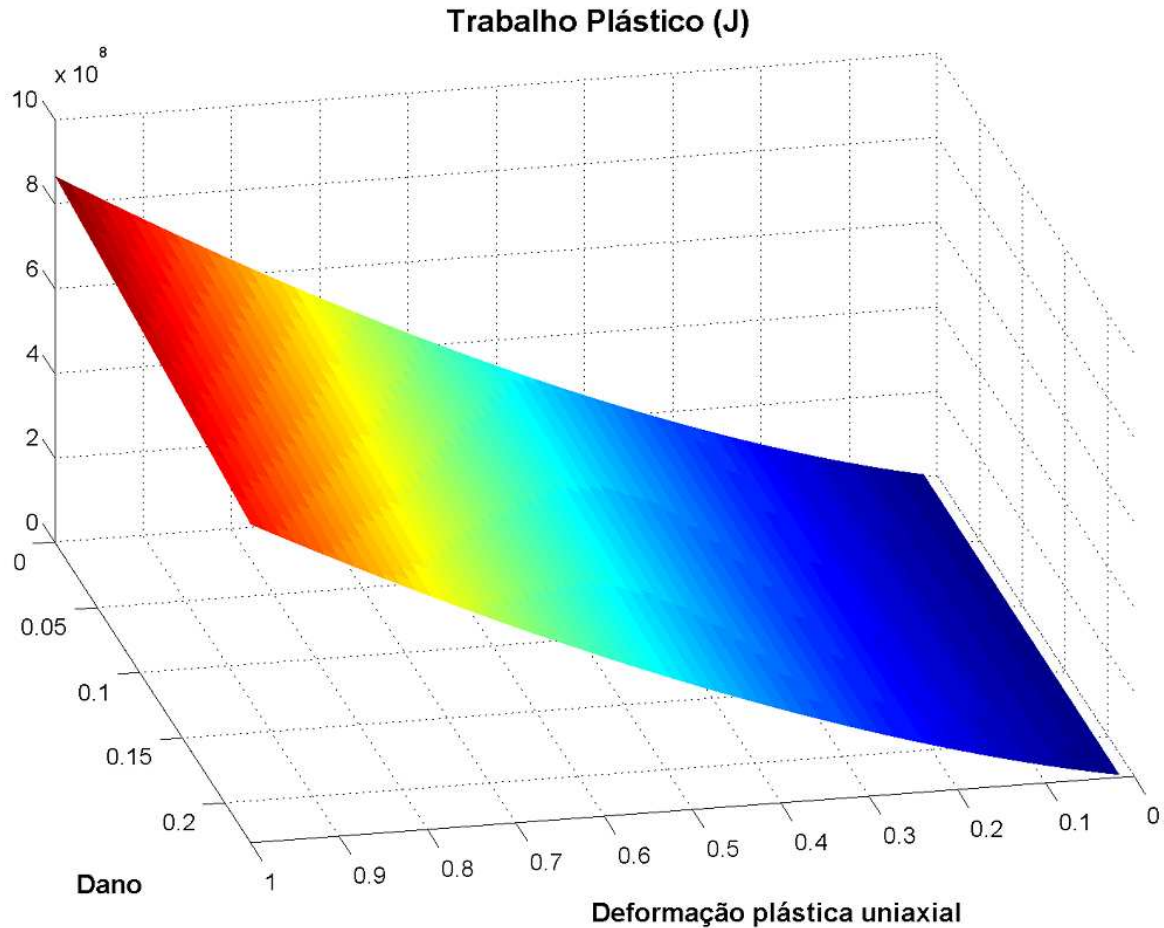


Figura 3.11. Superfície analítica do trabalho plástico.

Com base nesta representação, é possível comparar os resultados analíticos e numéricos para qualquer nível de dano e qualquer nível de deformação plástica acumulada. Para além disso, por este método não existem erros associados à medição das propriedades mecânicas utilizadas. Note-se que os valores presentes na Tabela 3.1 foram obtidos de diferentes fontes.

Num código implícito de elementos finitos, como é o caso do *Hypplas*, o cálculo do trabalho plástico é obtido por integração numérica da seguinte forma:

$$w_{p_{n+1}} = w_{p_n} + \sigma_{y_{n+1}} \bar{\epsilon}_{n+1}^p \quad (3.65)$$

onde σ_y consiste na tensão de cedência, $\bar{\epsilon}^p$ a deformação plástica acumulada e w_p o trabalho plástico. Os índices n e $n + 1$ são relativos aos incrementos. Note-se que este cálculo é efectuado em cada ponto de integração (ponto de Gauss).

A figura seguinte apresenta a distribuição da variável de dano para a malha com 1000 elementos finitos (apenas apresenta-se a figura desta malha, uma vez que em termos de distribuição o

resultado obtido com a malha grosseira é semelhante). Em termos práticos, a rotura verifica-se na superfície da viga que se encontra à tracção. Porém, analisando o resultado das simulações, isto não se verifica. Embora a superfície à tracção se apresente bastante danificada, é na superfície à compressão onde se encontra localizado o ponto com maior dano. Isto é um indicativo das dificuldades que este modelo possui em descrever coerentemente ensaios de compressão. Note-se que foi utilizado o modelo original de Lemaitre, sem a presença de um mecanismo de fecho de fendas.

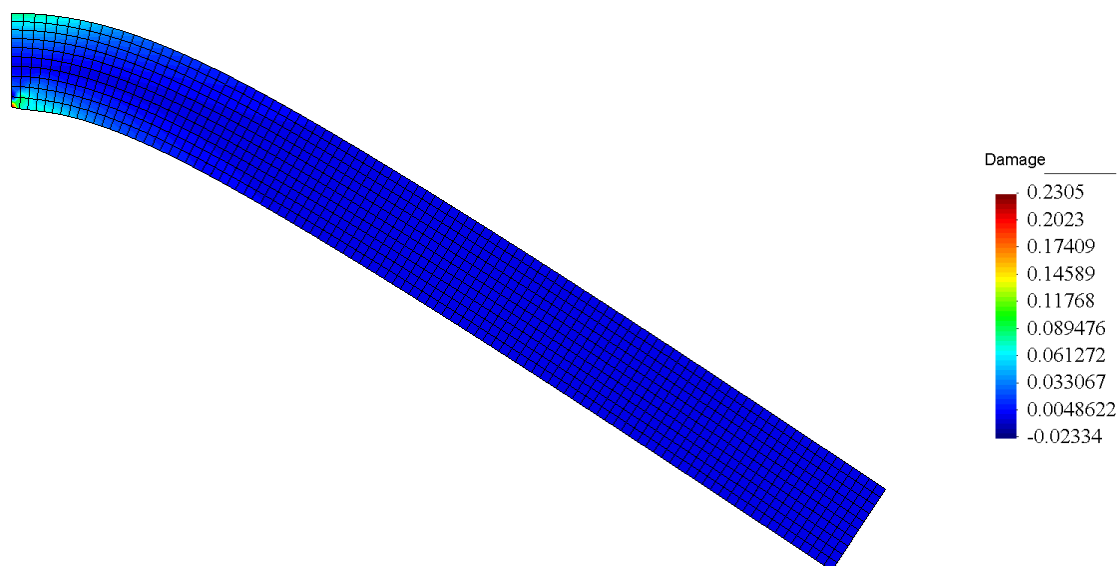


Figura 3.12 - Distribuição da variável de dano na malha com 1000 elementos.

Embora a solução qualitativamente não seja a mais correcta, a comparação de resultados (obtidos numérica e analiticamente) foi efectuada considerando o ponto onde a variável de dano é maior. A figura seguinte apresenta os resultados obtidos via numérica, sobrepostos com a superfície analítica. Como é possível verificar, os resultados obtidos via numérica encontram-se próximos da superfície analítica. Este facto é mais perceptível quando analisado o erro, tal como se apresenta na Figura 3.14.

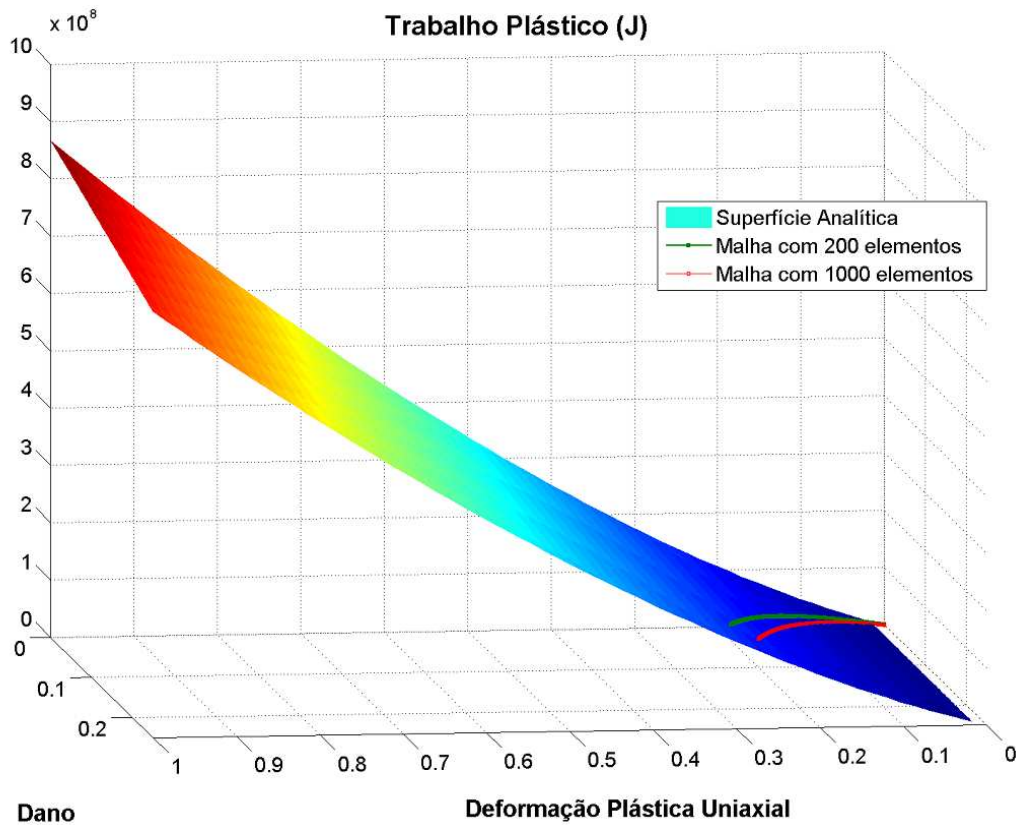


Figura 3.13. Resultados numéricos da flexão da viga.

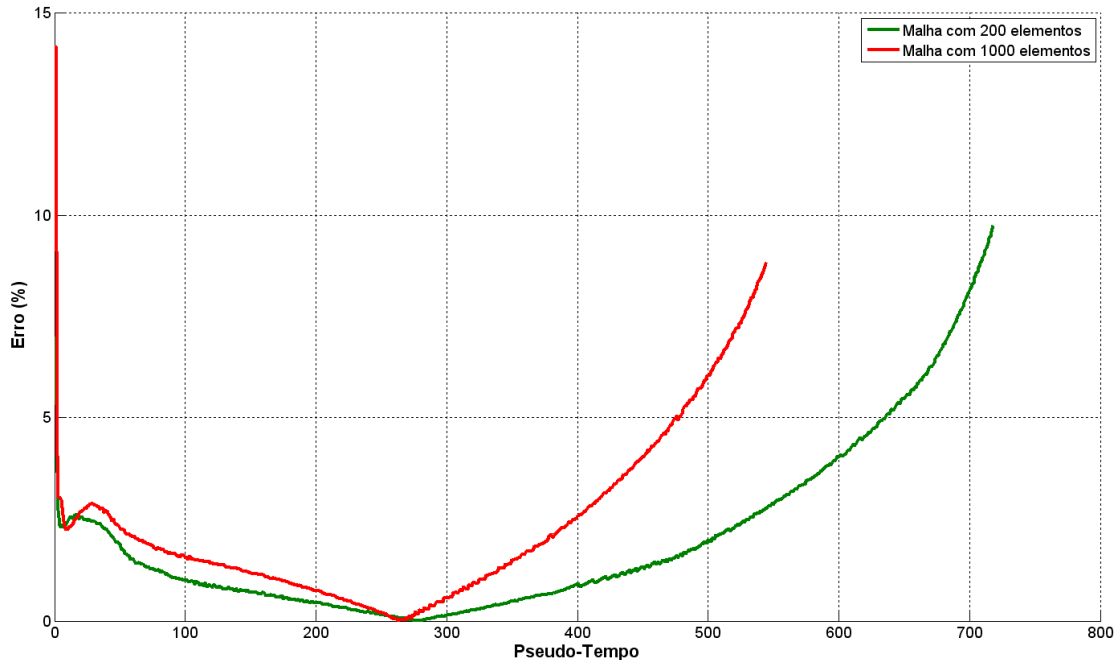


Figura 3.14. Erro entre a solução numérica e a analítica.

Pela figura anterior, é possível verificar que o erro entre a solução analítica e a simulação numérica não é significativo. Erros na casa dos 5% em simulações numéricas são aceitáveis. A presença de erros elevados numa fase inicial, deve-se à forma como é determinado o erro. Note-se que no caso de $\epsilon_p = 0$, o trabalho plástico é nulo, no entanto, é este valor que se encontra no denominador, levando que o erro final seja enorme. Numa fase final, verifica-se que o erro aumenta,

devendo-se à forma como a evolução da variável de dano na solução analítica foi definida – evolução linear.

Um último aspecto a retirar dos resultados é, uma vez mais, a dependência da malha. Esta diferença é sobretudo visível para níveis de deformação elevados.

3.9. Conclusões

Ao longo deste capítulo, foram apresentados os principais conceitos da mecânica de dano contínuo, nomeadamente o conceito da variável de dano. Simultaneamente, foram apresentados alguns modelos constitutivos acoplados com dano, como é o caso dos modelos originais de Lemaitre e Gurson que, posteriormente, serão alvo de uma análise quanto às suas capacidades em descrever a rotura em diferentes estados de tensão.

Por último, foram apresentadas duas soluções analíticas de problemas relativamente simples e comparadas com resultados numéricos provenientes de simulações com o modelo original de Lemaitre.

Dependência da triaxialidade na fractura

4.1. Introdução

Os primeiros critérios de fractura que surgiram, dos quais se destacam os critérios de McClintock (McClintock, 1968) e de Rice e Tracey (Rice & Tracey, 1969), consideravam que a rotura dúctil era dependente da tensão hidrostática, sendo este o único parâmetro responsável pela nucleação, crescimento e coalescência de vazios no interior do material.

Recentemente, uma nova vaga de investigadores refutou esta hipótese, revelando que a variável que controla o mecanismo de fractura é o coeficiente de triaxialidade $\left(\Gamma = \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right)$ (Bai, 2008) (Bao & Wierzbicki, 2004) (Bai, Bao, & Wierzbicki, 2006) (Bao, 2003). De acordo com este parâmetro, encontramos diferentes modos de rotura, bem como diferentes valores da deformação plástica acumulada na rotura, $\bar{\epsilon}_{rot}^p$ (secção 4.2).

Embora seja conhecida uma solução analítica publicada por Teng (Teng, 2008) para a evolução da deformação plástica acumulada na rotura em função do coeficiente de triaxialidade para o modelo de Lemaitre, são poucas as informações quanto à evolução desta mesma curva, quando utilizado o modelo de Gurson original (de Sousa Neto, Peric, & Owen, 2008). Face a esta ausência de informação, pretende-se neste capítulo apresentar os resultados de várias simulações numéricas com os modelos de von Mises, Lemaitre e Gurson bem como a curva de evolução da deformação plástica acumulada na rotura *versus* coeficiente de triaxialidade, $\bar{\epsilon}_{rot}^p(\Gamma)$ (secção 4.3).

4.2. Evolução da deformação plástica na rotura em função do coeficiente de triaxialidade

Inicialmente, o estudo da fractura dúctil concentrou-se na análise de ensaios de tracção de provetes cilíndricos sem e com entalhe. Estes ensaios apenas permitiam obter elevados coeficientes de triaxialidade, limitando o espectro do coeficiente de triaxialidade a valores superiores a 1/3. Porém, com a evolução dos métodos experimentais, bem como das ferramentas para a análise de dados, foi possível aumentar o espectro de análise, nomeadamente para valores do coeficiente de triaxialidade perto de zero, intrínsecos a ensaios de corte puro.

Um dos pioneiros na análise da fractura dúctil em função do coeficiente de triaxialidade foi Wierzbicki (Bai, Bao, & Wierzbicki, 2006) (Bao & Wierzbicki, 2004). Este investigador efectuou vários ensaios em diferentes provetes de forma a obter um vasto espectro de triaxialidade. Nesta secção será apresentado o trabalho efectuado por este investigador.

4.2.1. Ensaios realizados

Wierzbicki e a sua equipa realizaram ensaios experimentais em 15 diferentes provetes para a construção da curva de deformação plástica acumulada na rotura, $\bar{\varepsilon}_{rot}^p$ *versus* coeficiente de triaxialidade, Γ . Em termos experimentais, não é possível obter a deformação plástica acumulada nem o coeficiente de triaxialidade. Note-se que estes dois parâmetros foram definidos teoricamente, não existindo nenhuma correlação directa com parâmetros físicos mensuráveis. De forma a obter $\bar{\varepsilon}_{rot}^p$ e Γ , Wierzbicki e a sua equipa realizou, paralelamente aos ensaios experimentais, simulações numéricas dos vários provetes em código de elementos finitos, considerando o modelo de von Mises. Obtido o deslocamento que provoca a rotura do provete em termos experimentais, é aplicado na simulação numérica este mesmo deslocamento, obtendo-se desta forma $\bar{\varepsilon}_{rot}^p$ e Γ no respectivo ponto de rotura. No que respeita ao material, foi utilizada uma liga de alumínio 2024-T351 que foi devidamente calibrada para a realização dos ensaios numéricos.

A tabela seguinte apresenta os resultados obtidos para estes 15 ensaios.

Tabela 4.1. Valores experimentais do coeficiente de triaxialidade e respectiva deformação plástica acumulada na rotura obtidos por Wierzbicki (Bai, 2008).

Número do Ensaio	Provete	Coeficiente de Triaxialidade, Γ	Deformação Plástica Acumulada na rotura, $\bar{\epsilon}_{rot}^p$
1	Provete Cilíndrico sem Entalhe, Tracção	0.4014	0.4687
2	Provete Cilíndrico com entalhe de grande raio, Tracção	0.6264	0.2830
3	Provete Cilíndrico com entalhe de pequeno raio, Tracção	0.9274	0.1665
4	Placa entalhada em estado plano de deformação, Tracção	0.6030	0.2100
5	Cilindro à compressão $\frac{d}{h} = 0.5$	-0.2780	0.4505
6	Cilindro à compressão $\frac{d}{h} = 0.8$	-0.2339	0.3800
7	Cilindro à compressão $\frac{d}{h} = 1.0$	-0.2326	0.3563
8	Cilindro à compressão $\frac{d}{h} = 1.5$	-0.2235	0.3410
9	Provete Cilíndrico entalhado à compressão	-0.2476	0.6216
10	Ensaio de Corte Puro	0.0124	0.2107
11	Combinação de Corte e tracção	0.1173	0.2613
12	Placa com furo	0.3431	0.3099
13	“Dog-bone specimen”, tracção	0.3570	0.4798
14	Tubo, Tracção	0.3557	0.3255
15	Provete de Secção quadrada à tracção	0.3687	0.3551

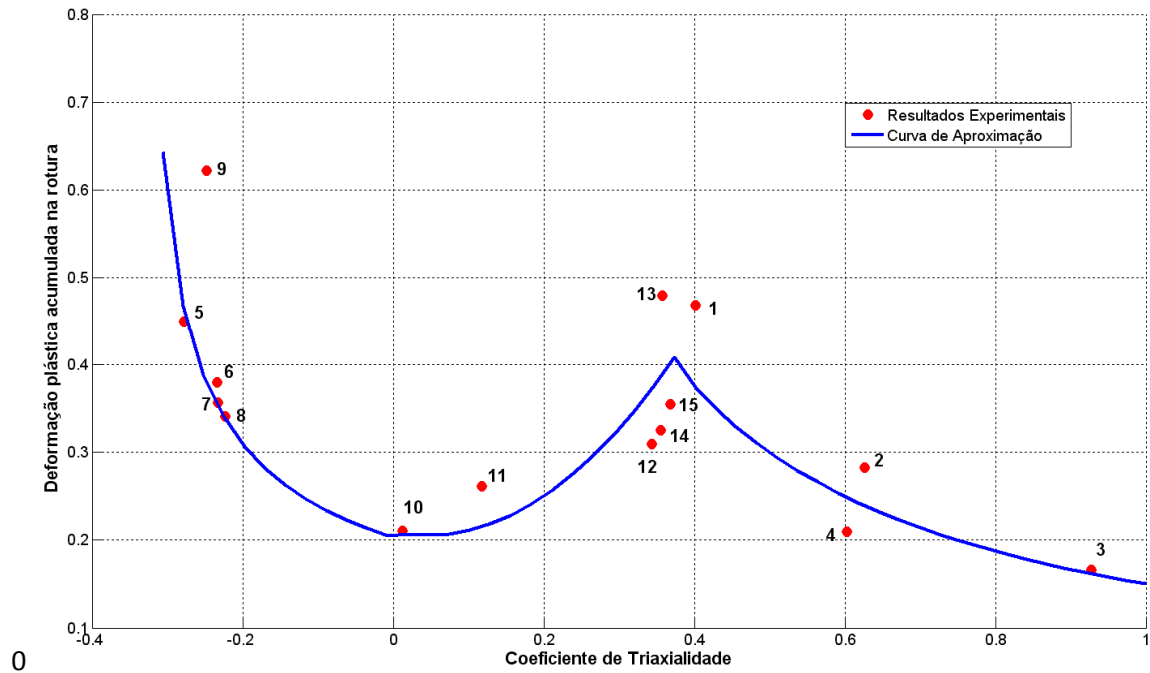


Figura 4.1 - Curva da deformação plástica acumulada na rotura em função do coeficiente de triaxialidade obtida por Wierzbick a partir de resultados experimentais (Bai, 2008).

A azul na figura 4.1 encontra-se uma curva que aproxima os valores experimentais, definidas pelas seguintes equações (Bao & Wierzbicki, 2004):

$$\begin{cases} 0.1225 \left(\Gamma + \frac{1}{3} \right)^{-0.46}, & \text{se } -\frac{1}{3} < \Gamma \leq 0 \\ 1.9\Gamma^2 - 0.18\Gamma + 0.21, & \text{se } 0 < \Gamma \leq 0.4 \\ 0.15\Gamma^{-1}, & \text{se } \Gamma > 0.4 \end{cases} \quad (4.1)$$

4.2.2. Gamas de triaxialidade

O gráfico anterior pode ser decomposto em três gamas de triaxialidade. A primeira gama, entre $-1/3$ e 0 é relativa a solicitações de compressão verificando-se que a deformação plástica acumulada diminui à medida que Γ aumenta. Nesta gama, a fractura ocorre devido a efeitos de corte, verificando-se o aparecimento de bandas de deslizamento nos provetes. As bandas de deslizamento consistem em planos onde as tensões de corte são máximas, provocando a rotura. O valor negativo do coeficiente de triaxialidade deve-se à tensão hidrostática, visto que a tensão equivalente é por definição positiva.

A segunda gama encontra-se compreendida para valores do coeficiente de triaxialidade entre 0 e 0.4 . Esta gama é característica de ensaios que combinam efeitos de corte e de tracção (ensaios 10 a 15), verificando-se que, no caso de corte puro, Γ é aproximadamente igual a zero. Este resultado particular deve-se à insensibilidade da tensão hidrostática relativamente a solicitações de corte puro, apresentando um valor praticamente nulo. É o ensaio de corte puro (ensaio número 10) que apresenta menor deformação plástica acumulada na rotura na gama de triaxialidade compreendida entre $-1/3$ e 0.4 . Isto é um indício da importância que a componente de corte apresenta na rotura. À medida que combinamos efeitos de corte e tracção, verifica-se um aumento suave de $\bar{\epsilon}_{rot}^p$.

A última gama é relativa a ensaios de tracção, onde $\Gamma > 0.4$. Neste caso, a rotura deve-se exclusivamente à nucleação, crescimento e coalescência de vazios. Há que salientar o facto de que à medida que o coeficiente de triaxialidade aumenta, a deformação plástica na rotura diminui, indicando-nos que quanto maior é Γ , menor é a ductilidade de um material.

4.2.3. Valor “Cut-off” de Triaxialidade

Um aspecto relevante que o gráfico anterior apresenta é a presença de um valor “cut-off” para o coeficiente de triaxialidade. Para valores de Γ inferiores a $-1/3$ não ocorre a fractura. Isto significa que para valores da tensão hidrostática inferiores a $-1/3$ da tensão equivalente de von Mises, o material deforma-se infinitamente, apresentando uma ductilidade infinita. Este resultado vem ao encontro do trabalho realizado por Bridgman (Xue, 2007). Este investigador, traccionou provetes cilíndricos de diferentes ligas de aço sujeitos a diferentes pressões hidrostáticas levando a que o coeficiente de triaxialidade diminuísse, concluindo que quanto maior era a pressão, maior era a deformação na rotura – maior ductilidade (Xue, 2007).

4.3. Construção da curva deformação plástica acumulada na rotura vs triaxialidade para os modelos de Lemaitre e de Gurson

O modelo de dano contínuo de Lemaitre e o modelo micromecânico de Gurson são amplamente utilizados pela indústria para a simulação de vários processos de enformação plástica, nomeadamente o corte.

Estes modelos, para além de contabilizarem a degradação interna de um material, são também utilizados como critérios de rotura, através das suas variáveis de dano, que passam a ter dupla função: avaliar o dano interno do material e indicar a rotura quando é atingido um determinado nível de dano, definido para cada tipo de material. Até ao presente momento, são poucas as informações quanto à capacidade destes dois modelos descreverem coerentemente os diferentes modos de rotura (compressão, corte e tracção), sobretudo o modelo de Gurson. Teng (Teng, 2008) publicou uma solução analítica para a evolução da deformação plástica na rotura em função do coeficiente de triaxialidade relativo ao modelo de Lemaitre (Teng, 2008). Segundo esta solução, verifica-se que o modelo de Lemaitre para valores do coeficiente de triaxialidade altos (solicitações de tracção) apresenta uma evolução de $\bar{\varepsilon}_{rot}^p(\Gamma)$ similar com os resultados experimentais de Wierzbicki, ou seja, à medida que o coeficiente de triaxialidade aumenta, diminui a ductilidade do material. Porém, nas gamas de triaxialidade compreendidas entre $-1/3$ a 0.4 a evolução de $\bar{\varepsilon}_{rot}^p$ é totalmente distinta da evolução apresentada por Wierzbicki. Relativamente ao modelo de Gurson, ainda não é conhecido a evolução da deformação plástica acumulada na rotura em função do coeficiente de triaxialidade. Devido à variável de dano associada ao modelo de Gurson, f (fracção volúmica de cavidades) espera-se que para altos valores do coeficiente de triaxialidade este modelo seja capaz de descrever coerentemente a rotura (note-se uma vez mais que nesta gama de triaxialidade, a rotura é determinada pela nucleação, crescimento e coalescência de vazios). Porém, o seu comportamento em estados que combine corte e/ou compressão é uma incógnita.

Face a esta lacuna de informação, foram efectuadas várias simulações numéricas utilizando estes dois modelos para a construção da curva $\bar{\varepsilon}_{rot}^p(\Gamma)$. Note-se que o objectivo consiste em avaliar a evolução das curvas e não comparar directamente os valores obtidos. Uma vez mais é referido que o programa de elementos finitos utilizado foi o “Hypas”.

4.3.1. Selecção do Material

O material utilizado nas simulações foi uma vez mais a liga de alumínio *Al 2024-T351*. Apresenta-se de seguida as propriedades necessárias nas simulações que se seguem.

Tabela 4.2 - Propriedades Mecânicas da liga de alumínio 2024 – T351.

Descrição	Valor	Fonte
Módulo de Young, E	72.4 [GPa]	(Teng, 2008)
Coefficiente de Poisson, ν	0.33	(Teng, 2008)
Tensão de Cedência, σ_{y0}	352 [MPa]	(Teng, 2008)
Dano crítico, D_c (modelo de Lemaitre)	0.23	(Teng, 2008)
Expoente de Lemaitre, s	1	(Teng, 2008)
Denominador de Lemaitre, S_0	6 [MPa]	(Teng, 2008)
Curva de encruamento, $\sigma(r)$, em função da variável de endurecimento isotrópica, r .	$352 + 853.4r^{0.66}$ [MPa]	(Teng, 2008)

4.3.2. Relação entre o dano e a fracção volúmica

Utilizando o modelo de Lemaitre como um modelo de fractura, a rotura ocorre quando num ponto do provete é atingido o dano crítico, D_c . Por sua vez, no modelo de Gurson, a rotura ocorre quando se atinge a fracção volúmica crítica, f_c . Ao contrário de D_c , que foi possível de se obter na bibliografia consultada, não existe informação quanto à fracção volúmica crítica para esta liga de alumínio. Todavia, foi possível estabelecer uma relação entre a variável de dano de Lemaitre crítico, D_c e a respectiva fracção volúmica crítica, f_c (Lemaitre J. , 1990). A relação que será apresentada de seguida é relativa ao modelo simples de Gurson, ou seja, não apresenta a nucleação e coalescência de microcavidades, caso contrário seria necessário adicionar um termo suplementar relativo à evolução do número de cavidades presentes.

Para a demonstração da relação $f_c = f_c(D_c)$ considere-se um volume representativo de dimensões $l \cdot l \cdot l$, apresentando n vazios cujo volume de cada vazio é dado por d^3 . Para este elemento de volume representativo, a fracção volúmica consiste no seguinte quociente:

$$f = \frac{nd^3}{l^3} \quad (4.2)$$

A fracção volúmica f apenas evolui em domínio plástico. Neste mesmo domínio a dissipação de energia é dada por:

$$w = \sigma \dot{\epsilon}^p \quad (4.3)$$

onde w consiste no trabalho dissipado, σ o tensor das tensões e ϵ o tensor das deformações. Decompondo os tensores presentes na expressão anterior na componente volumétrica e desviadora pode-se escrever:

$$w = (s + \sigma_H I)(\dot{\epsilon}_d^p + \dot{\epsilon}_H^p I) \quad (4.4)$$

$$\Leftrightarrow w = s : \dot{\epsilon}_d^p + 3\sigma_H \dot{\epsilon}_H^p \quad (4.5)$$

Na expressão 4.5, I consiste no tensor identidade de segunda ordem e ε_d^p no tensor desviador das deformações plásticas. O primeiro termo da equação anterior corresponde ao trabalho dissipado associado à componente desviadora enquanto o segundo termo é relativo à alteração de volume das cavidades. Uma vez que a fracção volúmica de cavidades no modelo de Gurson é dependente da tensão hidrostática, a componente desviadora poderá ser desprezada e a componente volumétrica do trabalho dissipado deverá ser igual à da energia dissipada no modelo de Lemaitre, resultado

$$3\sigma_H \dot{\varepsilon}_H^p l^3 = Y \dot{D} l^3 \quad (4.6)$$

onde Y consiste na taxa de libertação de energia elástica, \dot{D} a evolução da variável de dano do modelo de Lemaitre e l a dimensão do volume representativo.

Considerando que a evolução da porosidade f , no modelo de Gurson é igual à evolução da deformação plástica volumétrica pode-se escrever:

$$\dot{f} = \dot{\varepsilon}_H^p \quad (4.7)$$

Tendo em conta a equação anterior, pode-se reescrever a equação (4.6) da seguinte forma:

$$3\sigma_H \dot{f} = Y \dot{D} \quad (4.8)$$

$$\Leftrightarrow \dot{f} = \frac{\dot{D} Y}{3\sigma_H} \quad (4.9)$$

Admitindo que Y e σ_H são constantes ao longo da deformação do sólido e que nos instantes iniciais ambas as variáveis de dano são nulas obtém-se a seguinte relação:

$$f = \frac{DY}{3\sigma_H} \quad (4.10)$$

No caso limite – rotura – as variáveis D e f correspondem ao dano crítico e à fracção volúmica crítica respectivamente.

$$f_c = \frac{D_c Y}{3\sigma_H} \quad (4.11)$$

Substituindo a equação (3.20) na equação anterior obtemos

$$f_c = \frac{D_c}{3\sigma_H} \left[\frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1-D_c)^2} \left(\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\Gamma^2 \right) \right] \quad (4.12)$$

Após alguns testes, verificou-se que os resultados obtidos por este método não inspiram grande confiança. Na realidade, obtemos fracções volúmicas extremamente baixas. A título de exemplo, encontra-se na tabela seguinte o resultado da simulação de um provete cilíndrico com um entalhe de raio 4.5 mm e a respectiva fracção volúmica crítica

Tabela 4.3 - Fracção volúmica crítica obtida pelo método analítico apresentado para um ensaio de tracção

D_c	σ_H (MPa)	σ_{eq} (MPa)	f_c
0.2301	619.1568	525.6	0.00091790

Como é possível constatar, obteve-se uma fracção volúmica crítica muito pequena. Tal como já foi referido na secção 3.6.2 para valores da fracção volúmica muito pequenos, o modelo de Gurson não é mais do que o modelo de von Mises (este facto será devidamente apresentado nas secções seguintes). Uma das possíveis causas para os maus resultados desta solução analítica é a consideração de Γ e σ_{eq} constantes. Face aos resultados obtidos, pode-se desde já concluir que a solução proposta por Lemaitre e aqui apresentada não é viável (Lemaitre J. , 1990).

Devido à dificuldade em estabelecer uma relação entre a fracção volúmica crítica e a variável de dano crítico do modelo de Lemaitre, foi necessário relacionar ambas as variáveis de dano através de outros parâmetros intrínsecos ao ensaio. Analisando os diversos parâmetros, verifica-se que o deslocamento poderá ser utilizado como padrão para ambos os modelos, ou seja, se ocorre rotura num provete para um determinado nível de deslocamento prescrito u_c associado ao modelo de Lemaitre, a rotura segundo o modelo de Gurson também ocorre para este nível de deslocamento, independentemente do nível de porosidade atingido. Esta consideração, para além de ser aceite para ensaios numéricos é válida nos ensaios experimentais. Na realidade, o que define a rotura de um material são as condições de carregamento (entidades tangíveis), podendo estas ser deslocamentos prescritos ou forças.

O modelo de Gurson disponível no “*Hyplas*” trata-se do modelo original. Este modelo exige a introdução de uma porosidade inicial, sendo mais uma variável a ter em conta para a realização dos ensaios numéricos. Porém, uma vez que o objectivo é comparar a evolução da deformação plástica acumulada na rotura em função do coeficiente de triaxialidade, este parâmetro não apresenta um papel relevante. No entanto, para dispersar possíveis erros associados à porosidade inicial, efectuaram-se ensaios numéricos com diferentes níveis de porosidade inicial: $f_0 = 0.001$, $f_0 = 0.01$ e $f = 0.05$. Não foram considerados valores iniciais superiores a 0.05 porque considera-se que a fracção volúmica máxima a partir do qual a rotura é inevitável para este tipo de materiais é igual a 0.1 (Milne, Ritchie, & Karihaloo, 2004).

4.3.3. Simulações Numéricas

Nesta secção serão apresentados os resultados das simulações numéricas do modelo de Lemaitre e de Gurson. Para além destes modelos, simulou-se também os mesmos ensaios com o modelo de von Mises.

Consultando todas as publicações de Wierzbicki, não foi possível encontrar a descrição completa dos provetes utilizados, pelo que foi necessário recorrer a outras fontes e, como é óbvio, os provetes seleccionados não são exactamente os mesmos. Os ensaios realizados encontram-se divididos em quatro grupos: provetes axissimétricos submetidos à tracção dos quais fazem parte os provetes cilíndricos com diferentes entalhes, ensaios de compressão, ensaio de corte em estado plano de deformação e, por último, ensaio de tracção em estado plano de deformação.

4.3.3.1. Ensaios de Tracção de provetes cilíndricos

Foram testados quatro provetes cilíndricos, três dos quais com entalhe. A Figura 4.2 apresenta a geometria destes quatro entalhes. Note-se que o objectivo da introdução de entalhes consiste em

obter diferentes níveis de triaxialidade. À medida que o raio do entalhe diminui, o entalhe torna-se mais severo, resultando coeficientes de triaxialidade superiores. Em termos experimentais, a rotura ocorre no centro do provete. É neste ponto onde o efeito de nucleação, crescimento e coalescência de cavidades é maior, provocando o aparecimento de uma macro-fenda.

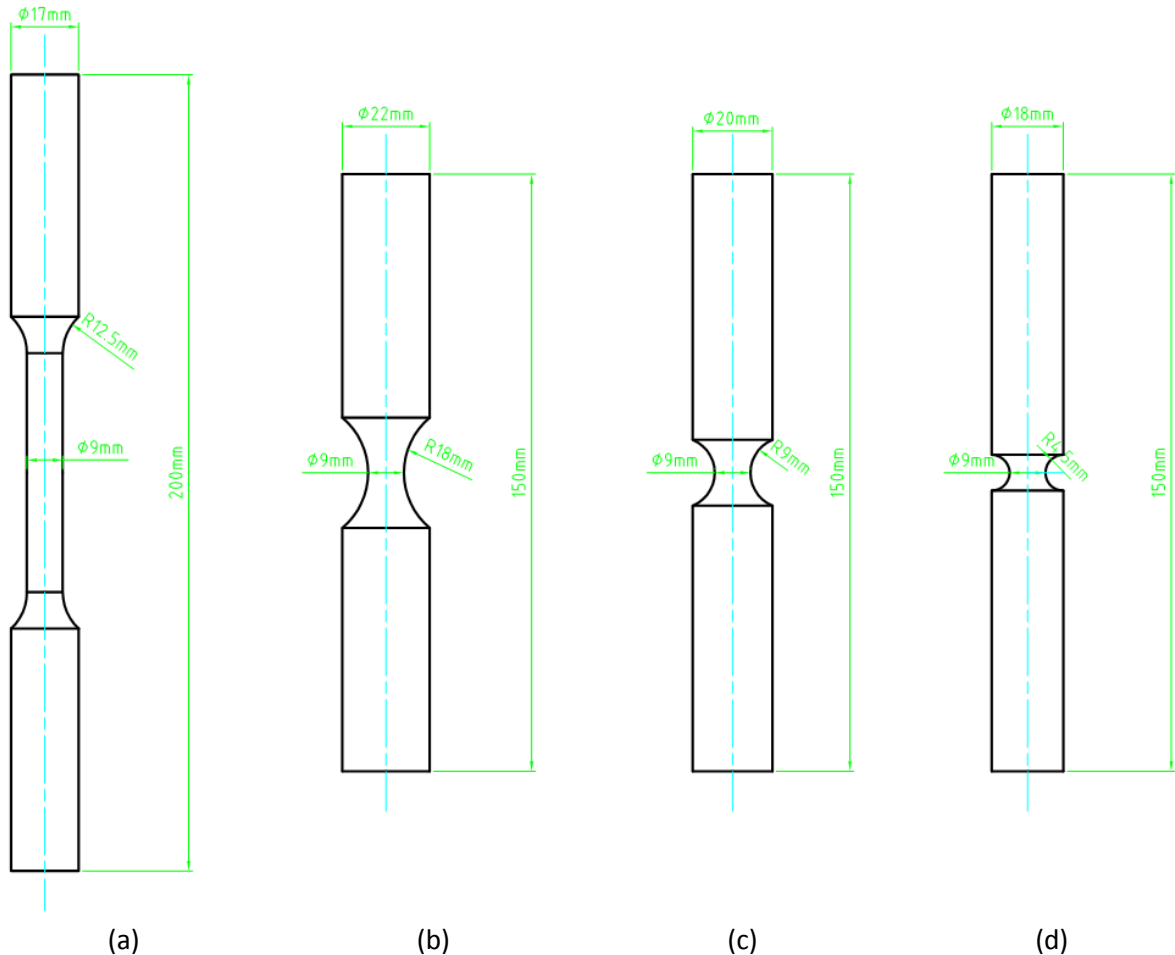


Figura 4.2 - Geometria dos provetes cilíndricos (Xue, 2007). (a) Provete cilíndrico sem entalhe. (b) $R = 18mm$. (c) $R = 9mm$. (d) $R = 4.5mm$

Face aos planos de simetria presentes, apenas um quarto dos provetes foi discretizado, poupando-se assim tempo de cálculo. O elemento finito seleccionado é quadrático de 8 nós, apresentando integração reduzida – 4 pontos de integração. A Figura 4.3. apresenta as quatro malhas de elementos finitos.

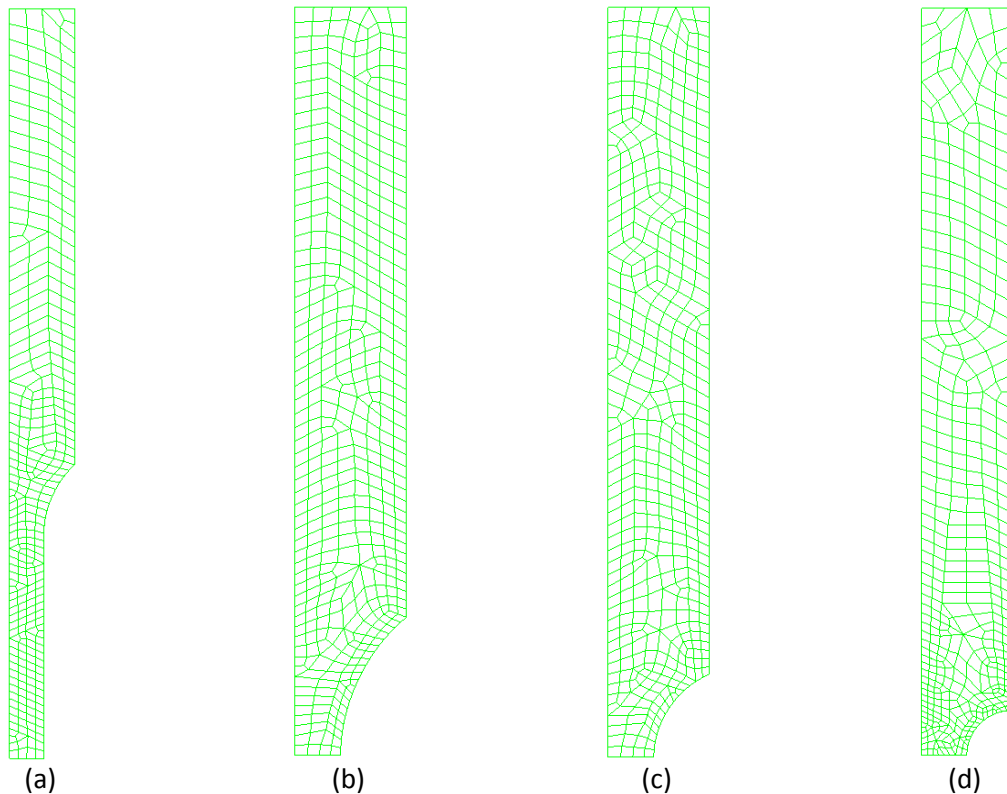


Figura 4.3 - Malha de elementos finitos. (a) Provete cilíndrico sem entalhe com 320 elementos; (b) Provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 18 \text{ mm}$ com 451 elementos; (c) Provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 9 \text{ mm}$ com 456 elementos; (d) Provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 4.5 \text{ mm}$ com 417 elementos.

A figura seguinte apresenta a curva de reacção em função do deslocamento para o provete cilíndrico sem entalhe. Embora não seja possível efectuar uma comparação directa com resultados experimentais, pode-se afirmar que as evoluções da curva de reacção para os diversos modelos constitutivos são coerentes. Como seria de esperar, no domínio elástico, todas as curvas encontram-se sobrepostas. Um outro aspecto relevante, é a sobreposição da curva de von Mises com a de Gurson para uma porosidade inicial muito baixa, $f_0 = 0.001$. Por último, importa referir que para um deslocamento superior a 6.5 mm, a reacção decresce de acordo com o modelo de Lemaitre. Este fenómeno é denominado por amolecimento ("*softening*").

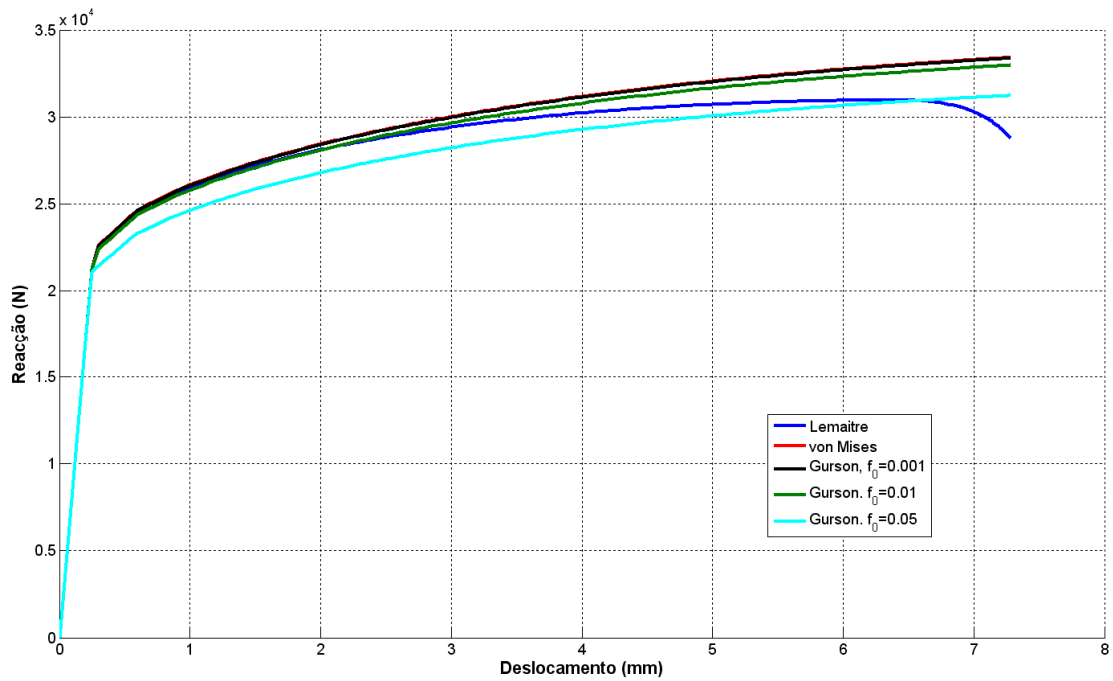


Figura 4.4. Curva de reacção do provete cilíndrico sem entalhe para os diferentes modelos em análise.

As três figuras seguintes apresentam a mesma curva mas agora para os restantes três provetes.

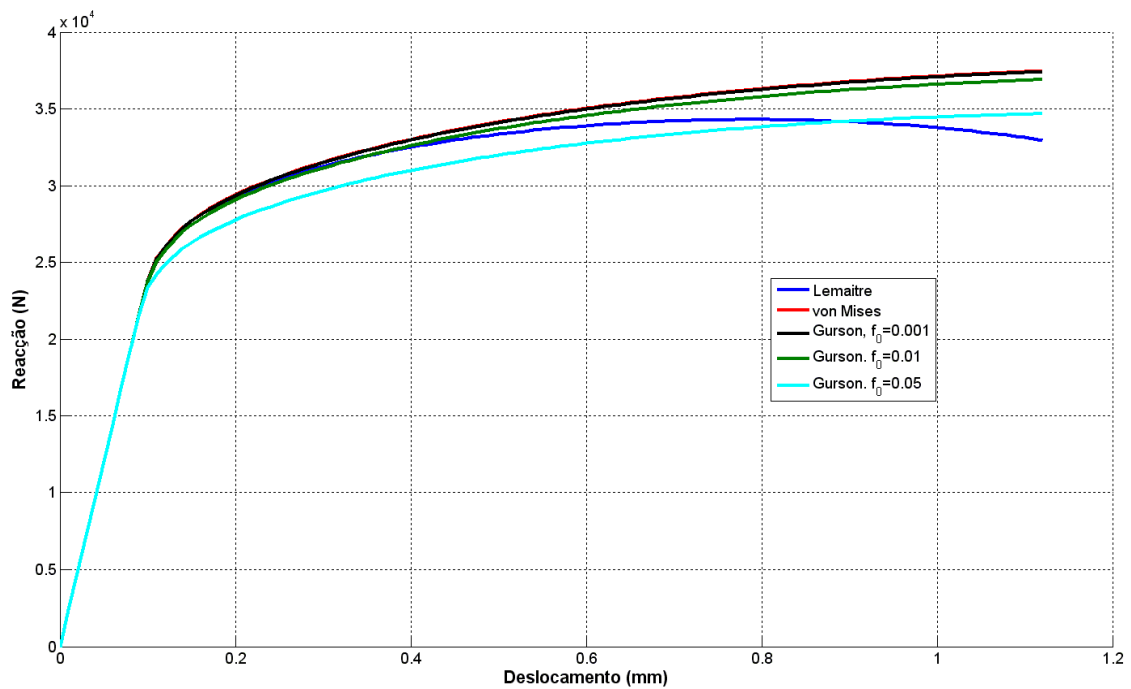


Figura 4.5. Curva de reacção para o provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 18 \text{ mm}$.

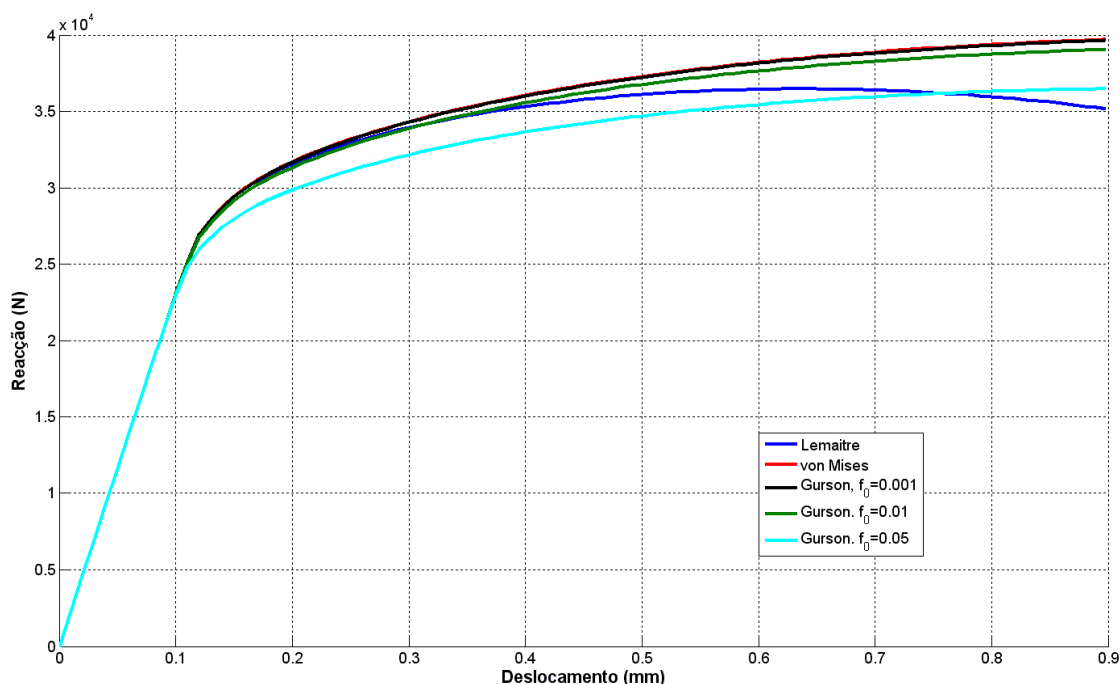


Figura 4.6. Curva de reacção do provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 9 \text{ mm}$.

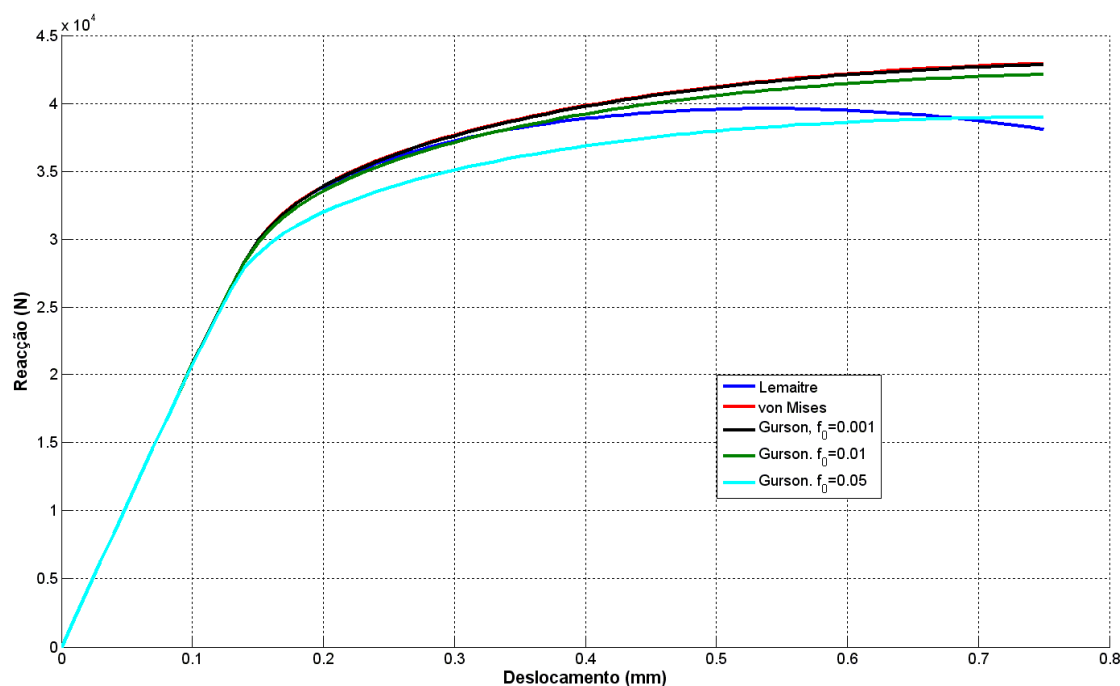


Figura 4.6. Curva de reacção do provete cilíndrico com entalhe de Raio $R = 4.5 \text{ mm}$.

À medida que o entalhe presente nos provetes é mais severo verifica-se a ocorrência de rotura para valores de deslocamento prescrito menores. Esta conclusão não é surpreendente na medida em que, quanto maior é o factor de concentração de tensões presentes num sólido, menor será a sua capacidade para resistir a sollicitações externas. Em termos de evolução das curvas de reacção, as conclusões a retirar para o caso dos provetes com entalhe são as mesmas que já foram apresentadas para o provete sem entalhe.

A distribuição da variável de dano (D no caso do modelo de Lemaitre e f no caso do modelo de Gurson) no provete cilíndrico sem entalhe é apresentado na Figura 4.7 para um deslocamento

prescrito de 7.283 mm . Apenas o modelo de Lemaitre indica que a rotura ocorre no centro do provete. Porém, o modelo de Gurson, apresenta uma distribuição para a fracção volúmica (variável de dano neste modelo) inesperada. Após uma análise mais cuidada deste ensaio, verifica-se que o modelo de Gurson indica correctamente o ponto de fractura mas para um nível de deslocamento prescrito superior. Isto permite-nos concluir desde já, que a variável de dano associada ao modelo de Lemaitre evolui mais rapidamente que a homóloga do modelo de Gurson.

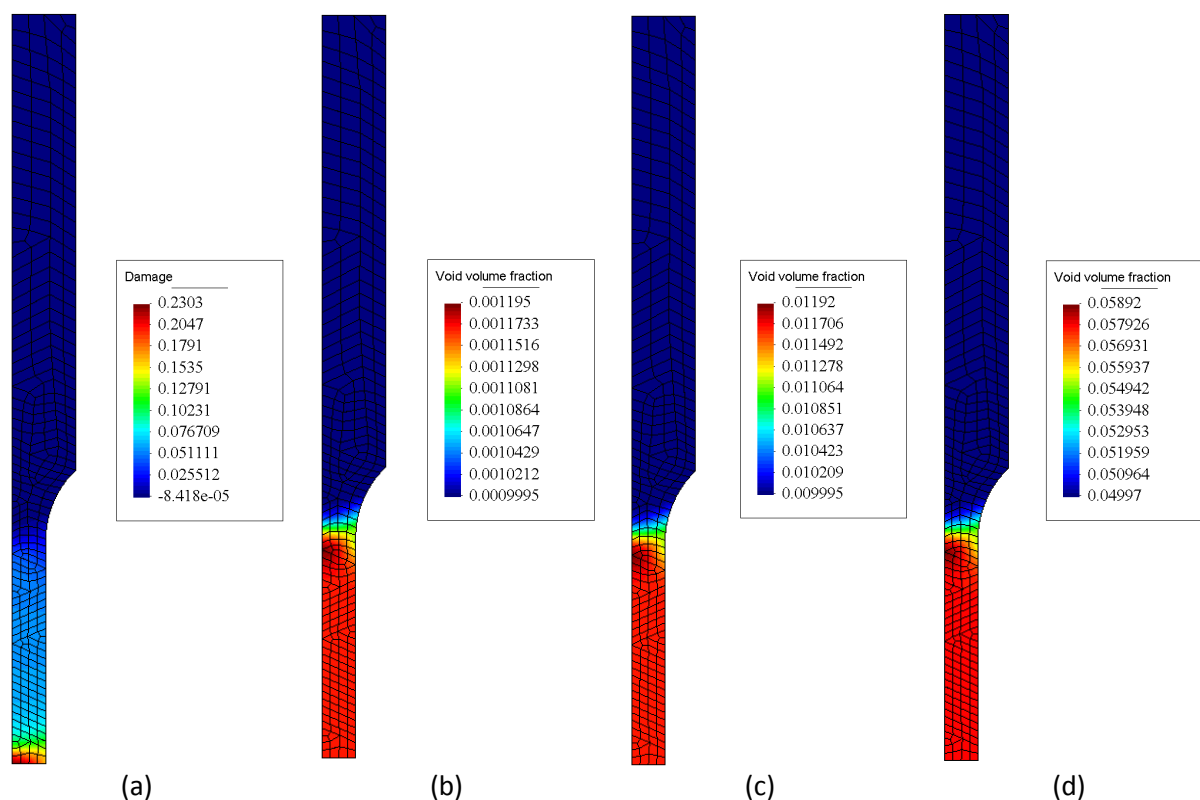


Figura 4.7. Distribuição da variável de dano no provete sem entalhe para um deslocamento prescrito de 7.283 mm . (a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.

Analisando as Figuras 4.8, 4.9 e 4.10 relativas aos provetes com entalhe, verifica-se que quer o modelo de Lemaitre, quer o modelo de Gurson com diferentes porosidades iniciais indicam que a rotura ocorre no centro do provete. Nestes casos, os resultados das simulações encontram-se de acordo com os resultados experimentais.

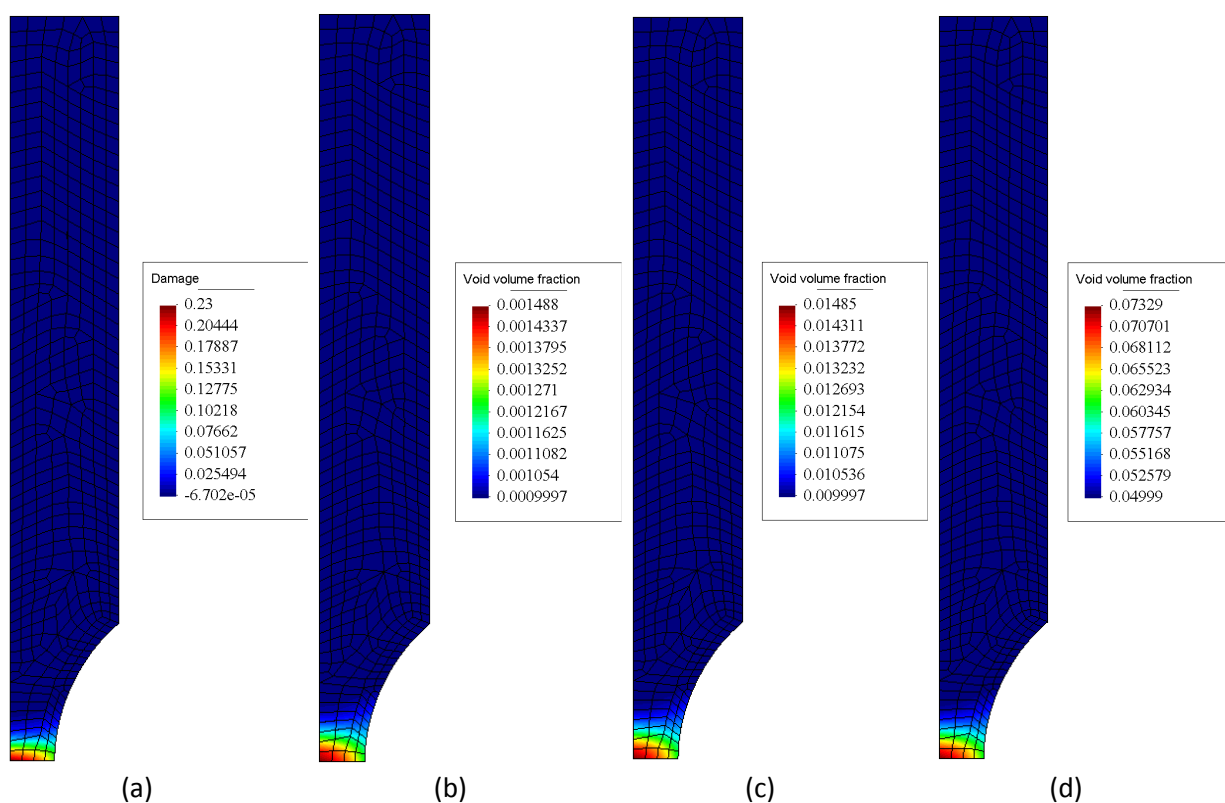


Figura 4.8. Distribuição da variável de dano no provete com entalhe de raio $R = 18 \text{ mm}$ para um deslocamento prescrito de 1.12 mm . (a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.

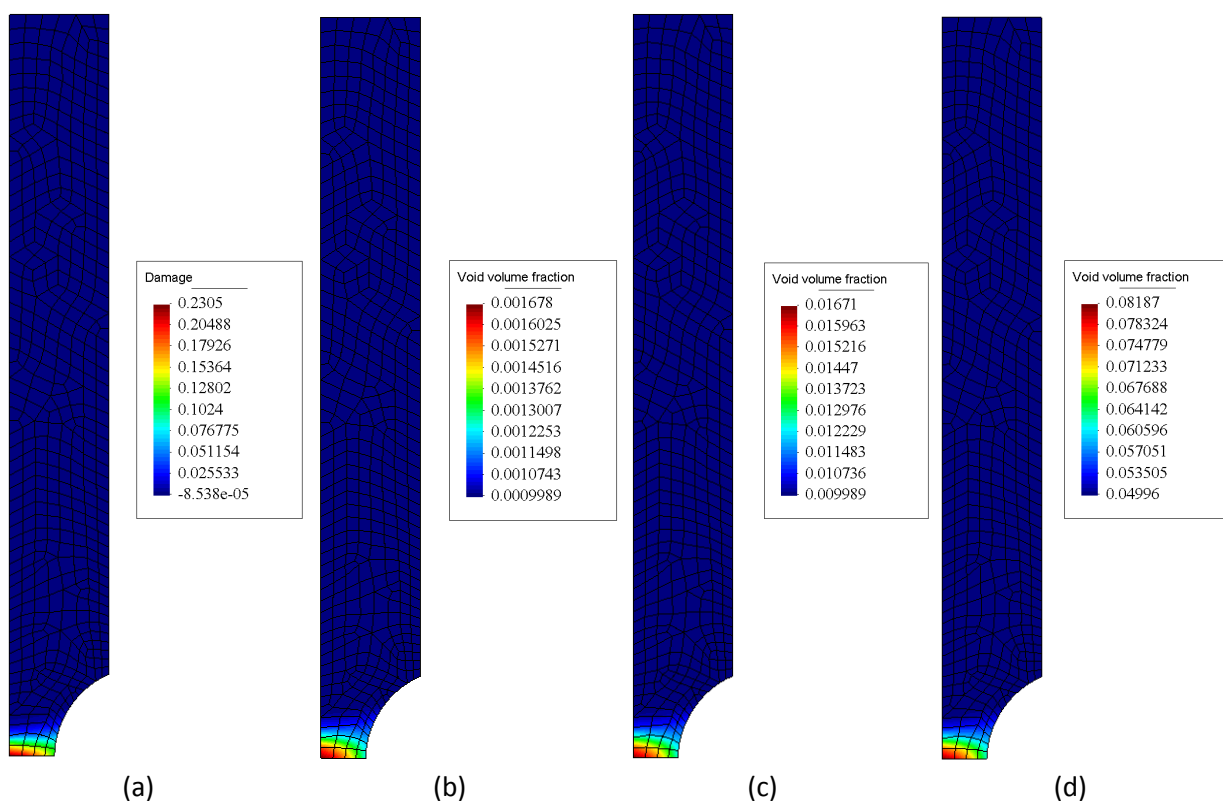


Figura 4.9. Distribuição da variável de dano no provete com entalhe de raio $R = 9 \text{ mm}$ para um deslocamento prescrito de 0.898 mm . (a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.

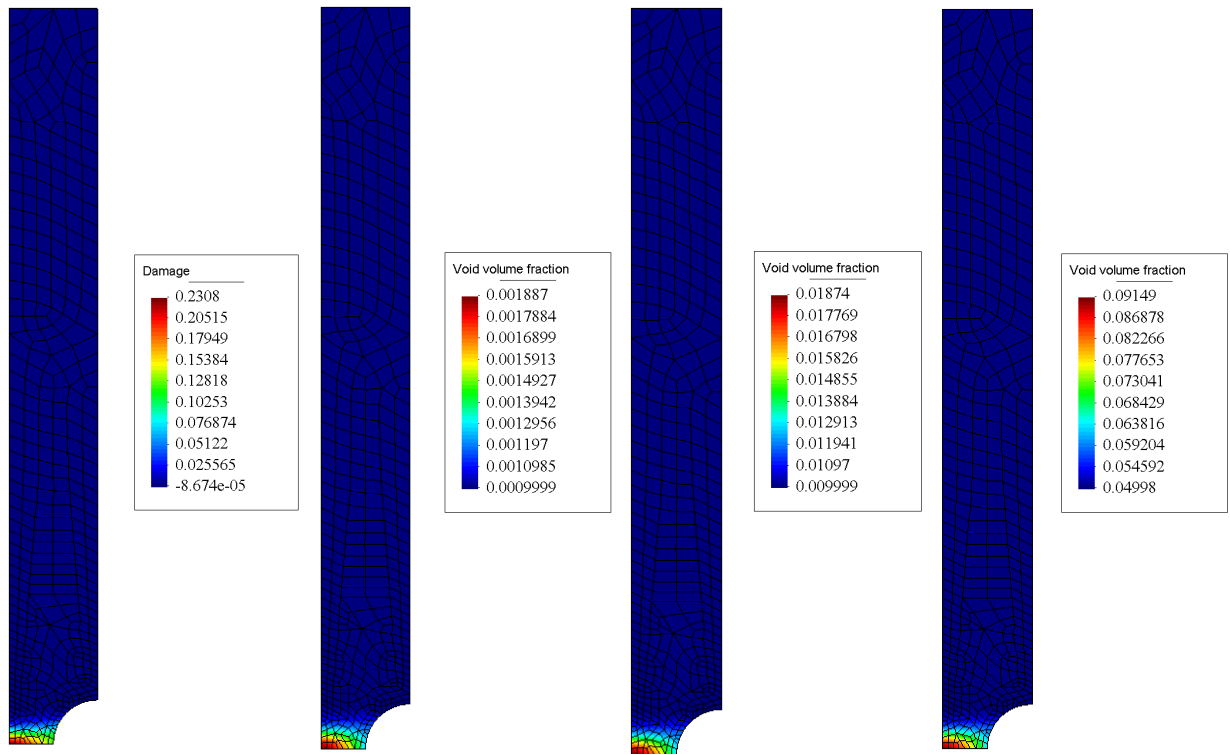


Figura 4.10. Distribuição da variável de dano no provete com entalhe de raio $R = 4.5 \text{ mm}$ para um deslocamento prescrito de 0.75 mm . (a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.

Embora não seja possível comparar directamente as variáveis de dano dos dois modelos, apresentam-se na Figura 4.11. as respectivas evoluções para o provete com entalhe de raio $R = 18 \text{ mm}$. Nos restantes provetes, as evoluções da variável de dano são similares, pelo que em termos de análise não introduzem nada de novo. Como é possível verificar, a variável de dano no modelo de Lemaitre evolui muito mais que a homóloga do modelo de Gurson. Comparando a evolução da fracção volúmica para diferentes f_0 , verifica-se que a sua evolução é similar para as diferentes porosidades iniciais, embora na Figura 4.11, este facto não seja claro. No entanto se representarmos uma vez mais a evolução da fracção volúmica em função do deslocamento, mas agora com escala logarítmica no eixo das ordenadas, é claramente visível a independência da evolução da variável de dano do modelo original de Gurson relativamente à fracção volúmica inicial, f_0 . A título de exemplo a Figura 4.12 apresenta esta representação para o caso do provete com entalhe de raio $R = 18 \text{ mm}$.

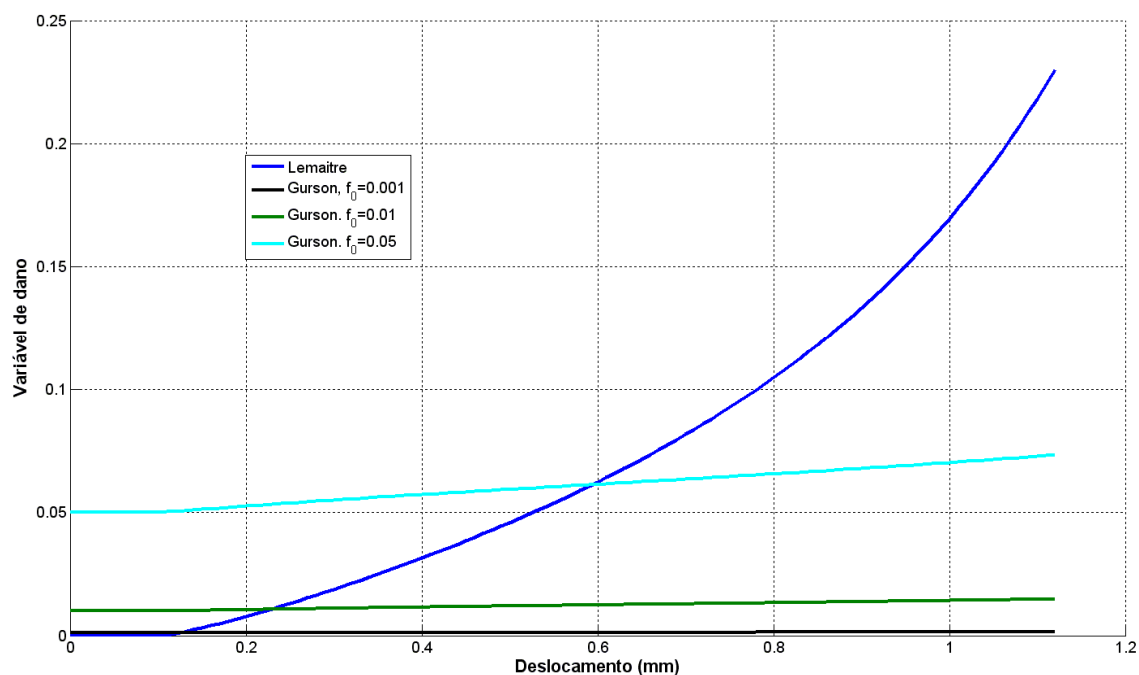


Figura 4.11. Evolução da variável de dano no provete entalhado de raio $R = 18 \text{ mm}$.

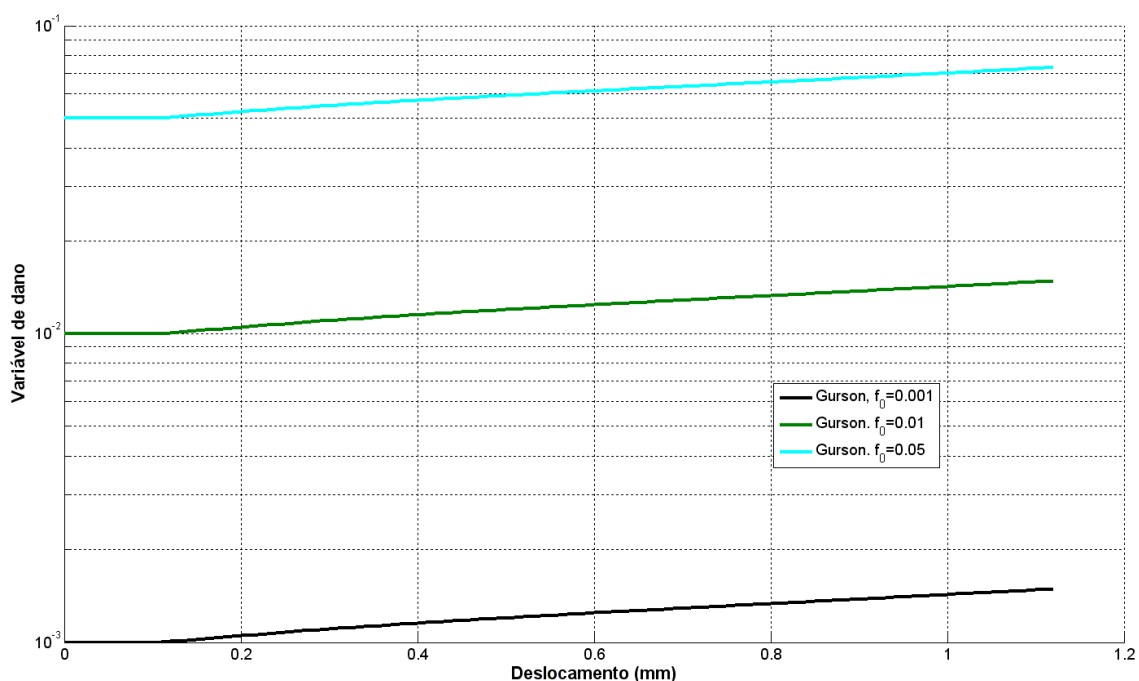


Figura 4.12. Representação da evolução da fracção volúmica em escala logarítmica para o provete com entalhe de raio $R = 18 \text{ mm}$.

Para terminar a análise deste tipo de provetes, importa avaliar a evolução da deformação plástica. Em termos de distribuição, esta variável apresenta uma distribuição semelhante à variável de dano e, como tal, não é apresentada nenhuma figura. Será sim apresentada a evolução da $\bar{\epsilon}^p$ em função do deslocamento no ponto de rotura (ver Figura 4.13) para o provete com entalhe de raio $R = 18 \text{ mm}$ (uma vez mais, apresenta-se apenas a evolução de um provete, uma vez que a informação a retirar é semelhante para os diferentes provetes).

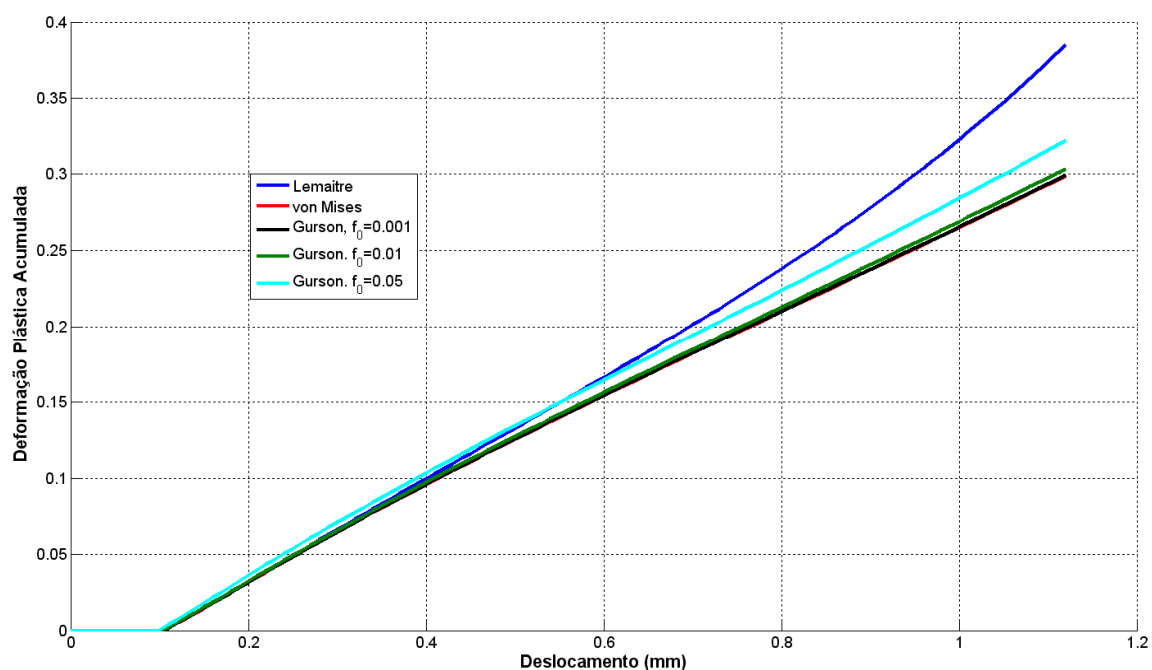


Figura 4.13. Evolução da deformação plástica acumulada no ponto de rotura no provete entalhado de raio $R = 18 \text{ mm}$.

Como seria de esperar, à medida que aumentamos f_0 , maior é a deformação plástica na rotura. Um aspecto relevante é a evolução praticamente linear que a deformação plástica acumulada associada ao modelo de Gurson apresenta, ao contrário do modelo de Lemaître. Inicialmente, as curvas de $\bar{\epsilon}^p$ do modelo de Lemaître e de Gurson com porosidades iniciais baixas coincidem. Porém, à medida que a variável de dano do modelo de Lemaître evolui, verifica-se uma evolução mais significativa de $\bar{\epsilon}^p$.

Na tabela seguinte apresentam-se os respectivos valores da deformação plástica acumulada na rotura e os respectivos coeficientes de triaxialidade para os diferentes modelos.

Tabela 4.4. Resultados da deformação plástica acumulada na rotura e respectivo coeficiente de triaxialidade obtidos pelas simulações numéricas para os ensaios de tracção.

Provete cilíndrico sem entalhe					
	Lemaitre	von Mises	Gurson, $f_0 = 0.001$	Gurson, $f_0 = 0.01$	Gurson, $f_0 = 0.05$
$\bar{\epsilon}_{rot}^p$	0.4357	0.2008	0.2008	0.2010	0.2018
Γ	0.5832	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333
Provete cilíndrico com entalhe de $R = 4.5\text{ mm}$					
	Lemaitre	von Mises	Gurson, $f_0 = 0.001$	Gurson, $f_0 = 0.01$	Gurson, $f_0 = 0.05$
$\bar{\epsilon}_{rot}^p$	0.2997	0.2395	0.2406	0.2512	0.2992
Γ	1.157	0.7964	0.7970	0.8029	0.8371
Provete cilíndrico com entalhe de $R = 9\text{ mm}$					
	Lemaitre	von Mises	Gurson, $f_0 = 0.001$	Gurson, $f_0 = 0.01$	Gurson, $f_0 = 0.05$
$\bar{\epsilon}_{rot}^p$	0.3516	0.2868	0.2875	0.2939	0.3221
Γ	0.9337	0.6170	0.6181	0.6258	0.6497
Provete cilíndrico com entalhe de $R = 4.5\text{ mm}$					
	Lemaitre	von Mises	Gurson, $f_0 = 0.001$	Gurson, $f_0 = 0.01$	Gurson, $f_0 = 0.05$
$\bar{\epsilon}_{rot}^p$	0.3851	0.2990	0.2995	0.3036	0.3225
Γ	0.8043	0.5020	0.5028	0.5087	0.5265

4.3.3.2. Ensaios de Compressão

Os ensaios de compressão tratam-se dos ensaios mais complexos de se simular numericamente. Para além de se tratar de um problema não-linear associado ao modelo constitutivo do material, inclui também a componente de não-linearidade geométrica.

Vulgarmente, os provetes utilizados em ensaios de compressão são pequenos cilindros. Estes ensaios denominam-se de “upsetting test”. Como é fácil de compreender, nas superfícies de contacto entre o cilindro e a prensa existe atrito. Atrito este que é significativo, interferindo nos resultados e que não pode ser desprezado em simulações numéricas. O programa de elementos finitos utilizados para a realização deste trabalho – “*Hyplas*” – não possui nenhum algoritmo de contacto, o que inviabiliza a realização destes testes.

Segundo Wierzbicki (Bai, Bao, & Wierzbicki, 2006) (Bao & Wierzbicki, 2004), o efeito do atrito em ensaios de compressão de provetes entalhados é praticamente nulo, podendo ser desprezável em simulações numéricas. Devido à geometria do provete à compressão, a secção crítica (superfície entalhe) encontra-se significativamente afastada, não sendo afectada pelas condições de fronteira existentes nos topos do provete. Nestes ensaios, à medida que o carregamento evolui, planos de deslizamento vão se evidenciando junto à superfície do entalhe, característicos dos efeitos de corte. Ao contrário dos ensaios de tracção, neste caso, a rotura ocorre à superfície do entalhe. Para a simulação deste tipo de ensaio, recorreu-se aos três provetes anteriormente apresentados na secção 4.3.3.1.

Tal como nos ensaios de tracção apresentados anteriormente, o primeiro parâmetro analisado foi a curva de reacção (Fig. 4.14, 4.15 e 4.16).

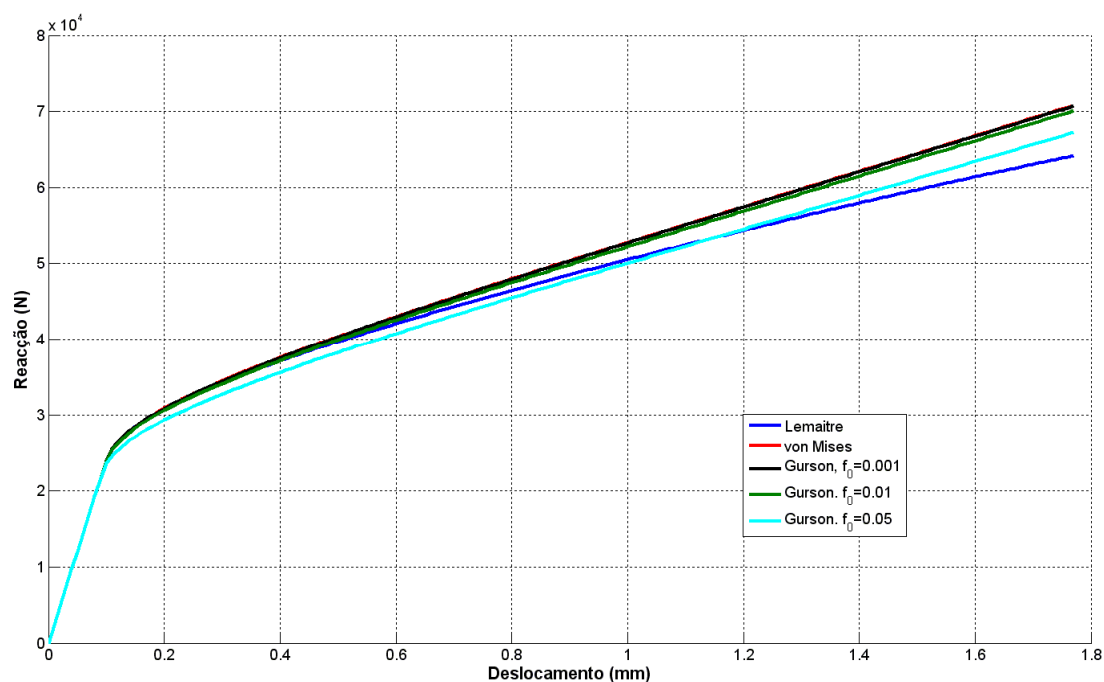


Figura 4.14. Curva de reacção do provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 18 \text{ mm}$ à compressão

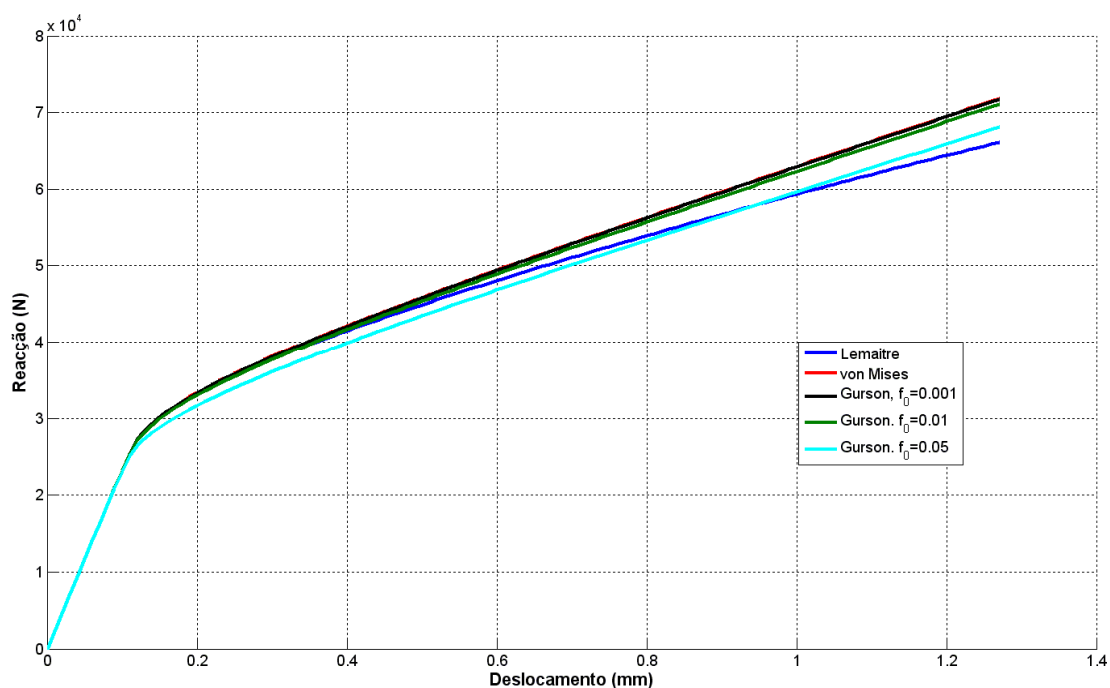


Figura 4.15. Curva de reacção do provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 9 \text{ mm}$ à compressão.

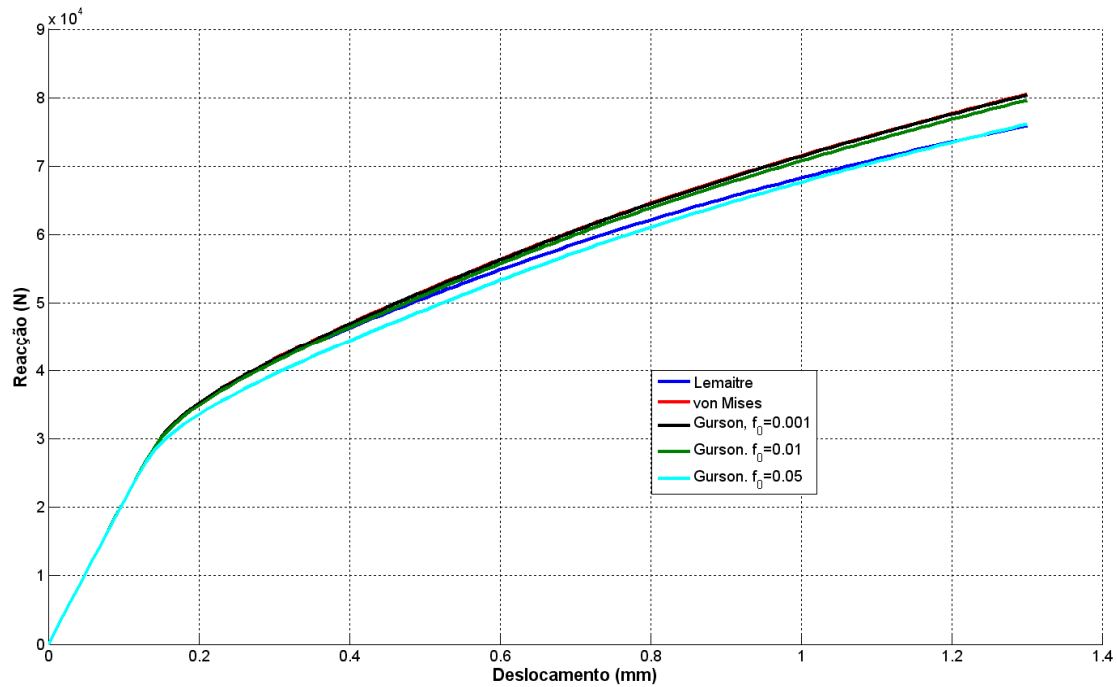


Figura 4.16. Curva de reacção do provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 4.5 \text{ mm}$ à compressão

Pelas imagens anteriores, verifica-se que à medida que a porosidade inicial aumenta, menor é a capacidade de carga do material, o que em termos reais faz sentido. Um aspecto interessante a retirar das imagens anteriores é a evolução da curva de reacção do modelo de Gurson em domínio plástico. Esta curva é praticamente linear sobretudo nos provetes com entalhe de raio $R = 18 \text{ mm}$ e $R = 9 \text{ mm}$.

A distribuição da variável de dano encontra-se nas Figuras 4.17, 4.18 e 4.19. Analisando as figuras associadas ao modelo de Lemaître, verifica-se que a rotura ocorre no interior do provete, à excepção do caso do provete com entalhe de raio $R = 4.5 \text{ mm}$ (Fig. 4.17 a), 4.18 a), 4.19 a)). Na realidade, este resultado já era previsível, na medida em que, o modelo de Lemaître utilizado na simulação não incorpora o efeito de fecho de vazios proposto por F.A. Pires (Andrade Pires, 2001). Relativamente ao modelo de Gurson, como era previsível, a sua variável de dano não é indicada para a simulação deste tipo de ensaios. À medida que o provete é comprimido, as microcavidades no interior do sólido fecham, fazendo com que f diminua. Em termos numéricos, uma diminuição de f indica que o material não se encontra a degradar, verificando-se precisamente o oposto.

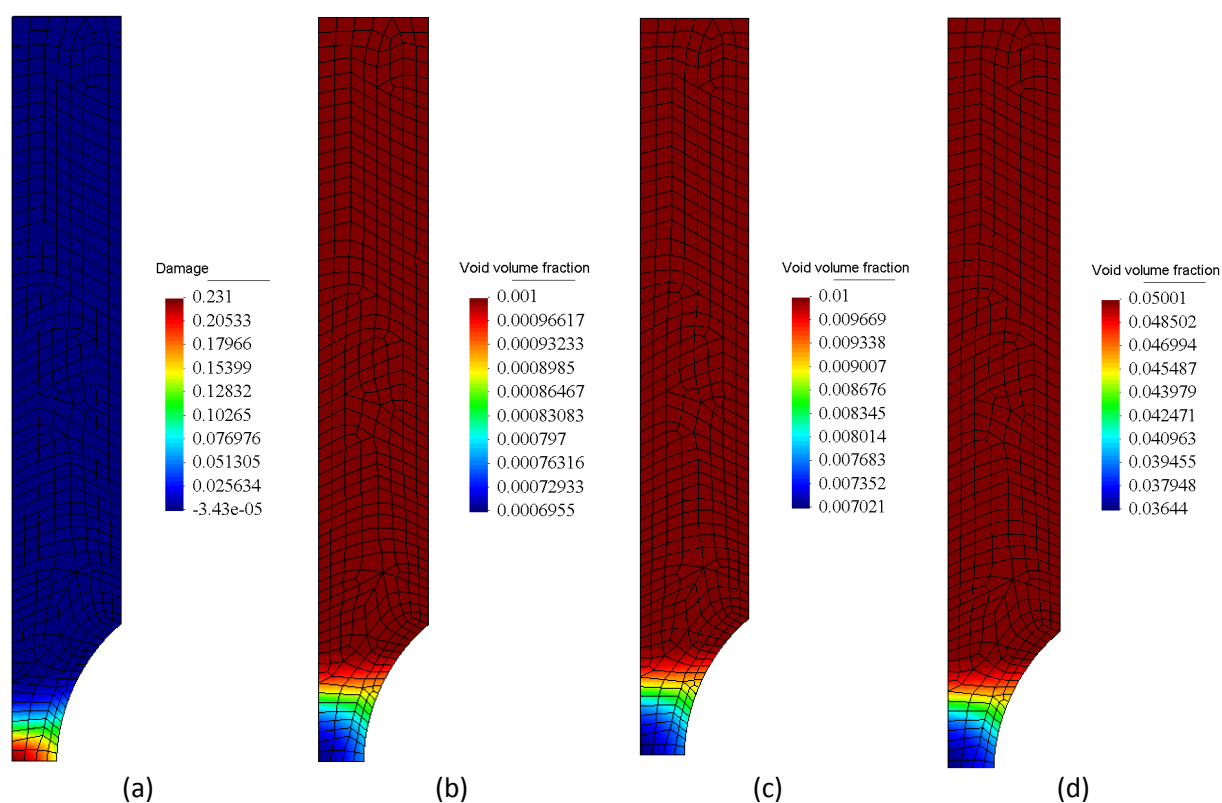


Figura 4.17. Distribuição da variável de dano para o provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 18 \text{ mm}$ à compressão para um deslocamento prescrito de 1.77 mm . (a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.

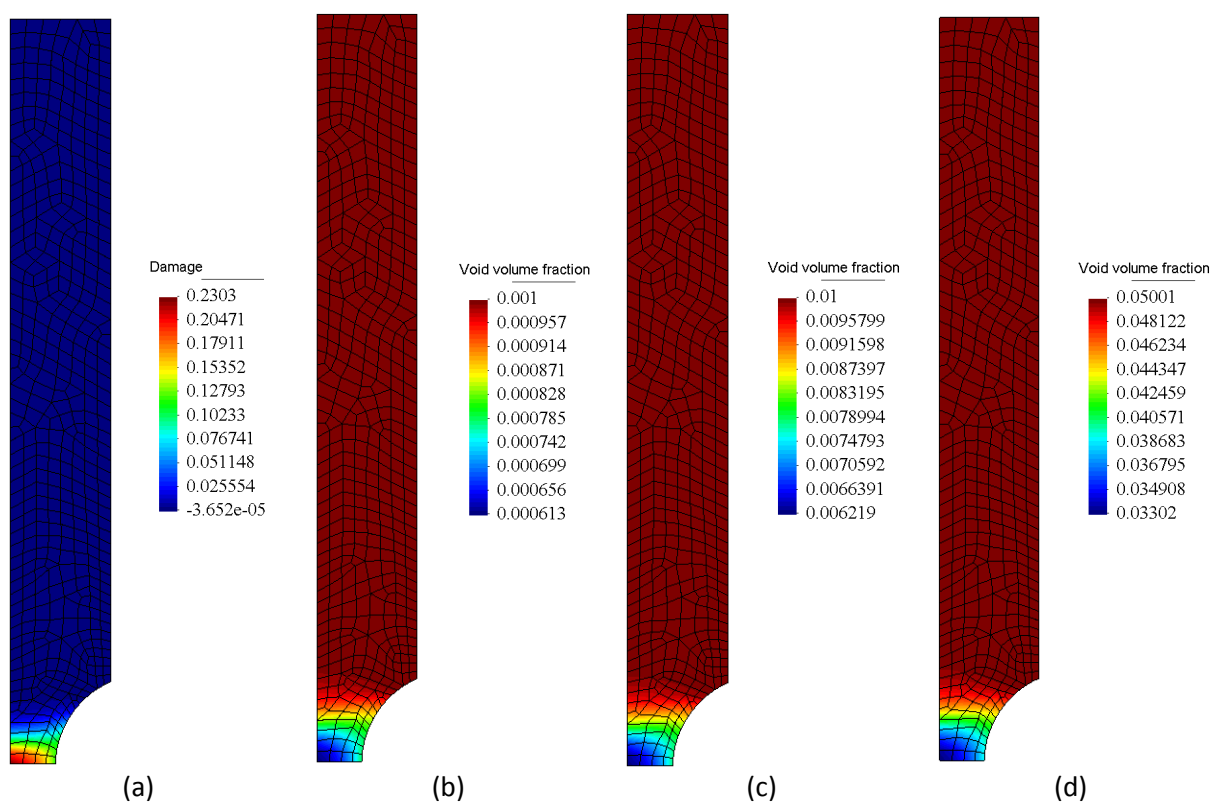


Figura 4.18. Distribuição da variável de dano para o provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 9 \text{ mm}$ à compressão para um deslocamento prescrito de 1.271 mm . (a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.

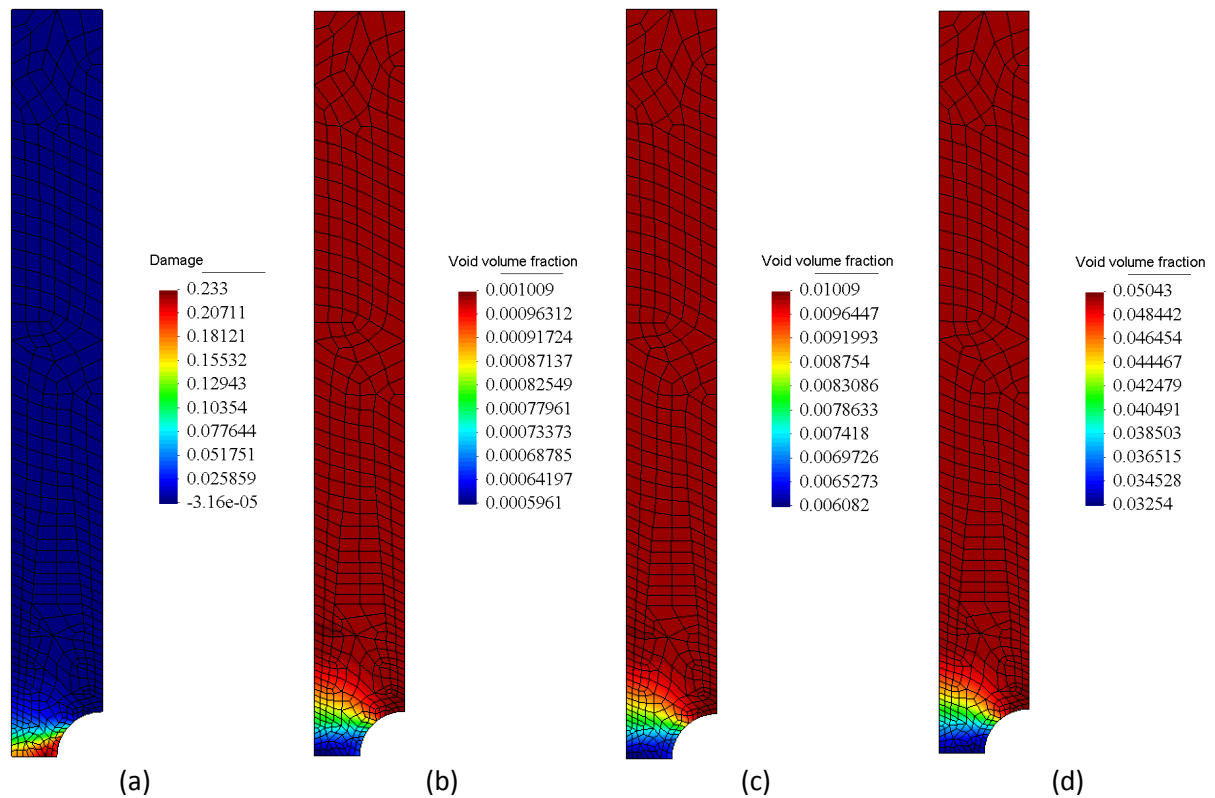


Figura 4.19. Distribuição da variável de dano para o provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 4.5 \text{ mm}$ à compressão para um deslocamento prescrito de 1.3 mm . (a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.

Ao contrário dos ensaios de tracção, onde as distribuições das variáveis de dano dos dois modelos em análise são similares com a distribuição da deformação plástica acumulada, nos ensaios de compressão este facto não se verifica. As Figuras 4.20, 4.21 e 4.22 apresentam a distribuição desta variável para os diferentes provetes. No caso dos provetes com entalhes de raio $R = 18 \text{ mm}$ e $R = 9 \text{ mm}$, verifica-se que a deformação plástica acumulada distribui-se uniformemente ao longo da menor secção do entalhe. No entanto, verifica-se que ambos os modelos no caso do provete com entalhe de raio $R = 4.5 \text{ mm}$ apresentam uma deformação plástica máxima à superfície, encontrando-se de acordo com resultados experimentais. Há que salientar também o facto do modelo de Lemaitre apresentar sempre a maior deformação plástica acumulada, em quanto que, no caso do modelo de Gurson, à medida que a porosidade inicial aumenta, verifica-se também um aumento de $\bar{\epsilon}_{rot}^p$.

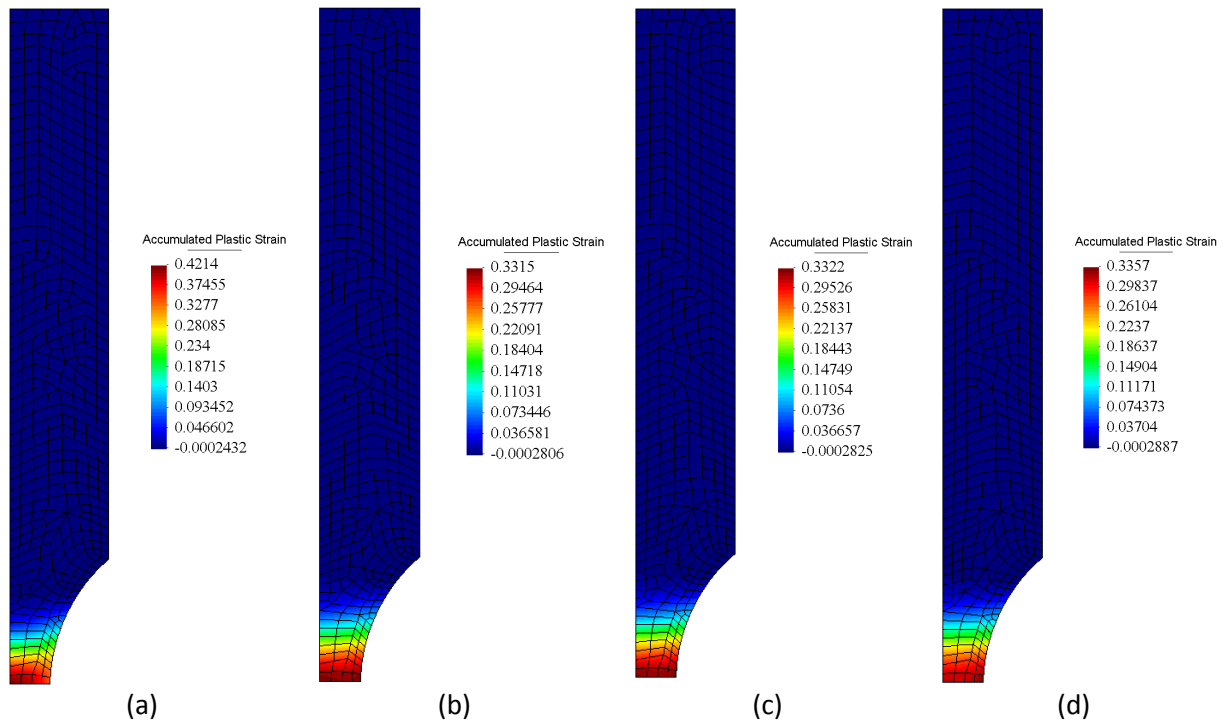


Figura 4.20. Distribuição da deformação plástica acumulada no provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 18 \text{ mm}$ à compressão para um deslocamento prescrito de 1.77 mm . a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.

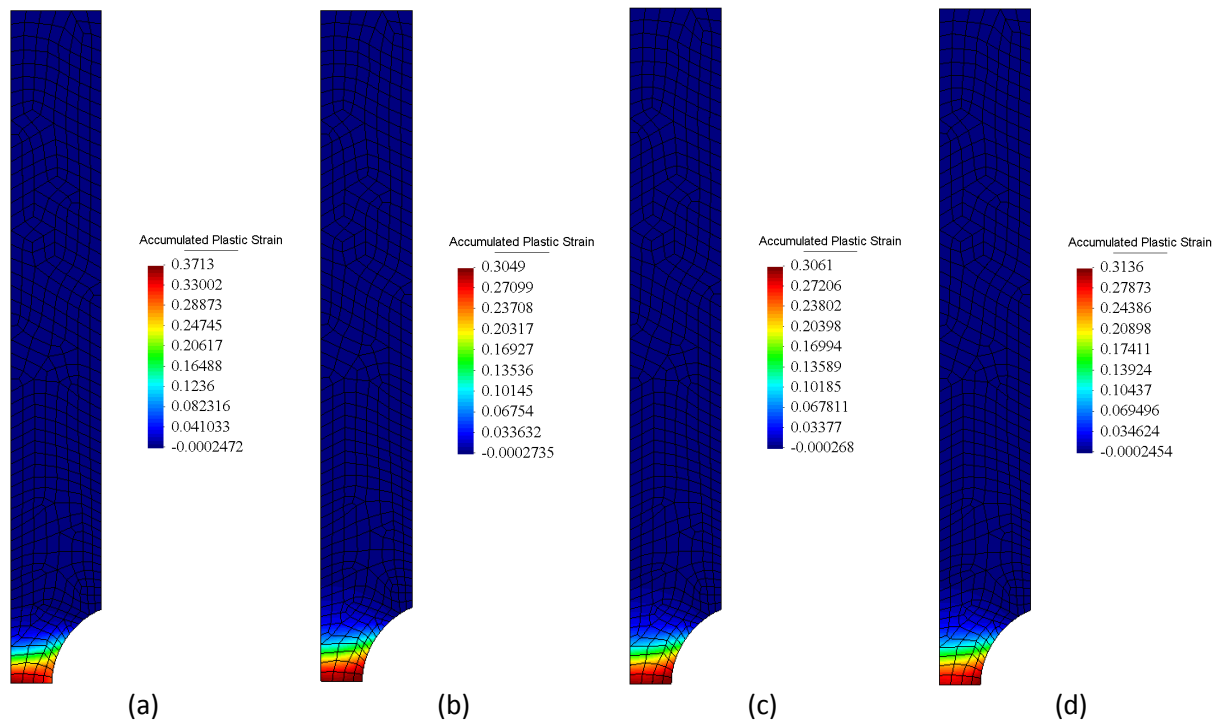


Figura 4.21. Distribuição da deformação plástica acumulada no provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 9 \text{ mm}$ à compressão para um deslocamento prescrito de 1.271 mm . a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.

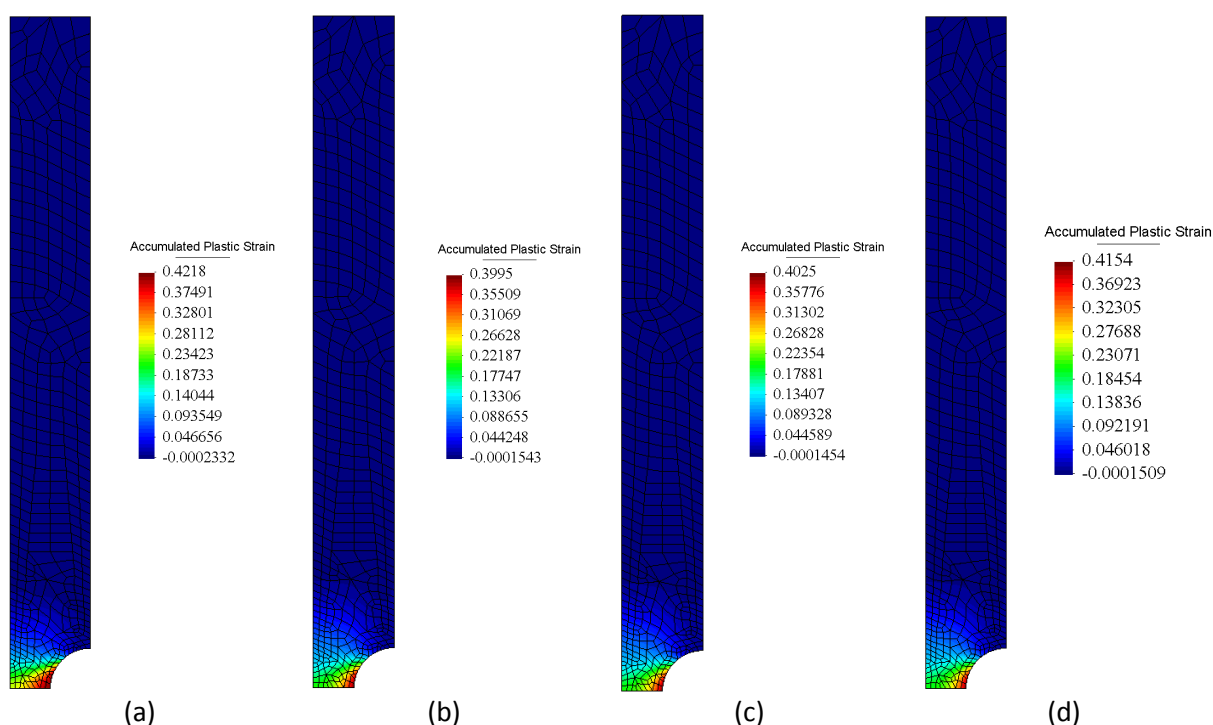


Figura 4.22. Distribuição da deformação plástica acumulada no provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 4.5 \text{ mm}$ à compressão para um deslocamento prescrito de 1.3 mm . a) Lemaître; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.

A Tabela 4.5 apresenta as deformações plásticas na rotura e o respectivo coeficiente de triaxialidade. Estes valores foram retirados do nó à superfície do entalhe, embora nenhum modelo analisado indicasse este ponto como ponto de rotura.

Tabela 4.5. Resultados da deformação plástica acumulada na rotura e respectivo coeficiente de triaxialidade obtidos pelas simulações numéricas para os ensaios de compressão.

Provete cilíndrico com entalhe de $R = 4.5 \text{ mm}$					
	Lemaître	von Mises	Gurson, $f_0 = 0.001$	Gurson, $f_0 = 0.01$	Gurson, $f_0 = 0.05$
$\bar{\epsilon}_{rot}^p$	0.4061	0.3992	0.3995	0.4025	0.4154
Γ	-0.3709	-0.4840	-0.4843	-0.4870	-0.4964
Provete cilíndrico com entalhe de $R = 9 \text{ mm}$					
	Lemaître	von Mises	Gurson, $f_0 = 0.001$	Gurson, $f_0 = 0.01$	Gurson, $f_0 = 0.05$
$\bar{\epsilon}_{rot}^p$	0.3068	0.3043	0.3045	0.3061	0.3136
Γ	-0.2636	-0.3818	-0.3822	-0.3857	-0.4008
Provete cilíndrico com entalhe de $R = 18 \text{ mm}$					
	Lemaître	von Mises	Gurson, $f_0 = 0.001$	Gurson, $f_0 = 0.01$	Gurson, $f_0 = 0.05$
$\bar{\epsilon}_{rot}^p$	0.3400	0.3312	0.3313	0.3322	0.3357
Γ	-0.2564	-0.3835	-0.3837	-0.3856	-0.3929

4.3.3.3. Ensaios de Corte

A simulação de estados de corte em provetes em 2D é uma tarefa delicada, exigindo provetes com geometrias pouco convencionais. Para a simulação de corte, foi utilizado um provete proposto por Brunig (Brunig, Chyra, Albrecht, Driemeier, & Alves, 2007). Experimentalmente, verifica-se que

neste provete, a rotura inicia-se no interior da secção resistente devido a efeitos acentuados de corte.

A Figura 4.23 a) apresenta a geometria do provete, e 4.23 b) a respectiva malha de elementos finitos. Esta malha é composta uma vez mais por elementos quadráticos de 8 nós com integração reduzida. A simulação foi efectuada em estado plano de deformação.

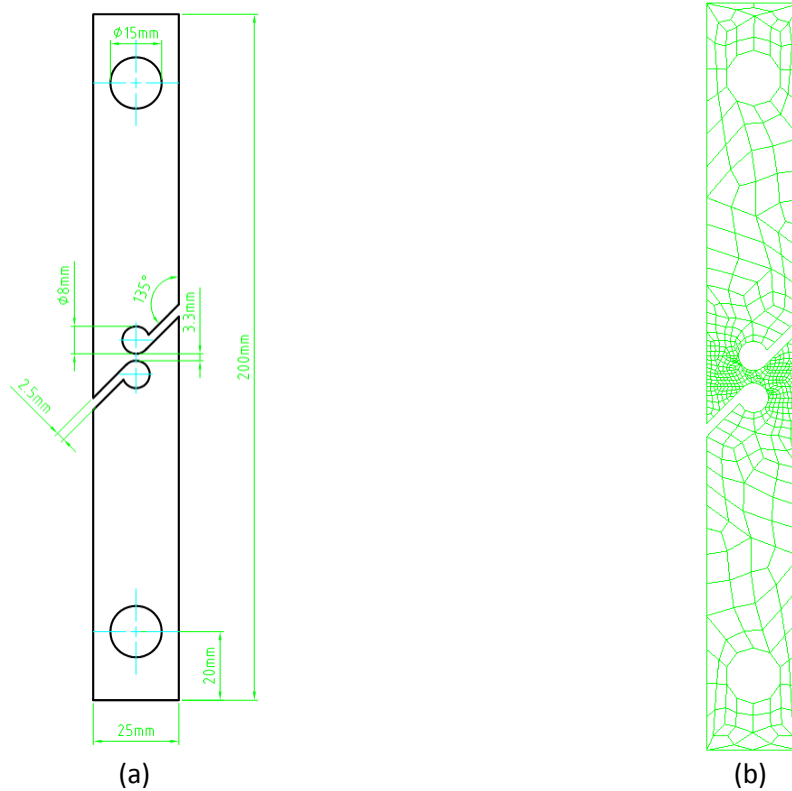


Figura 4.23. - Provete de Corte. a) Dimensões do provete de corte utilizado; b) Malha de elementos finitos com 518 elementos.

Uma vez mais, o primeiro parâmetro analisado foi a curva de reacção. A Figura 4.24 apresenta as curvas de reacção em função do deslocamento prescrito para os diferentes modelos. Como não poderia deixar de ser, no domínio elástico, as curvas encontram-se sobrepostas. Tal como nos ensaios de tracção, à medida que a porosidade inicial no modelo de Gurson aumenta, verifica-se uma diminuição na capacidade de carga do material. É de salientar que, para o nível de deslocamento atingido, as três curvas associadas ao modelo de Gurson em domínio plástico são praticamente paralelas.

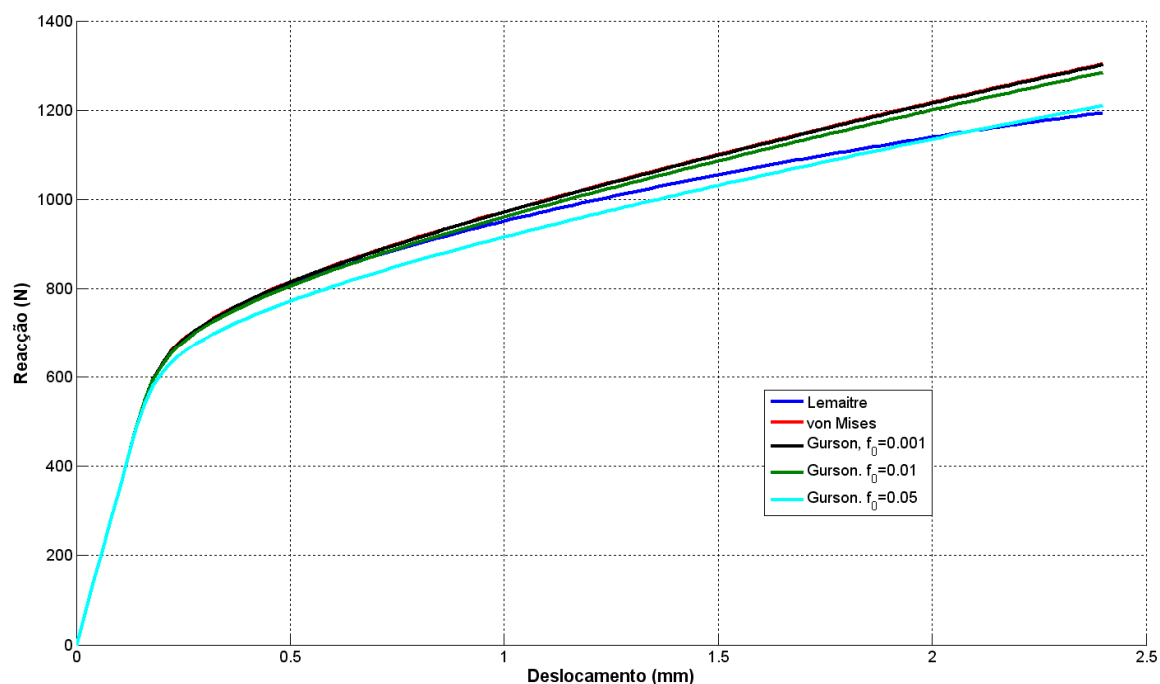


Figura 4.24. Curvas de reacção para o provete de corte

A Figura 4.25 apresenta a distribuição das variáveis de dano no provete de corte para um deslocamento prescrito de 2.4 mm . Analisando esta figura, constata-se que apenas o modelo de Lemaitre indica que a rotura ocorre no ponto previsto. Isto permite afirmar que o modelo original de Gurson não apresenta um bom desempenho em casos de corte. É possível consolidar esta conclusão através da evolução da variável de dano representada na Figura 4.26. No ponto crítico (onde em termos experimentais verifica-se a rotura) a evolução da fracção volúmica é muito pequena, ao contrário da variável D do modelo de Lemaitre.

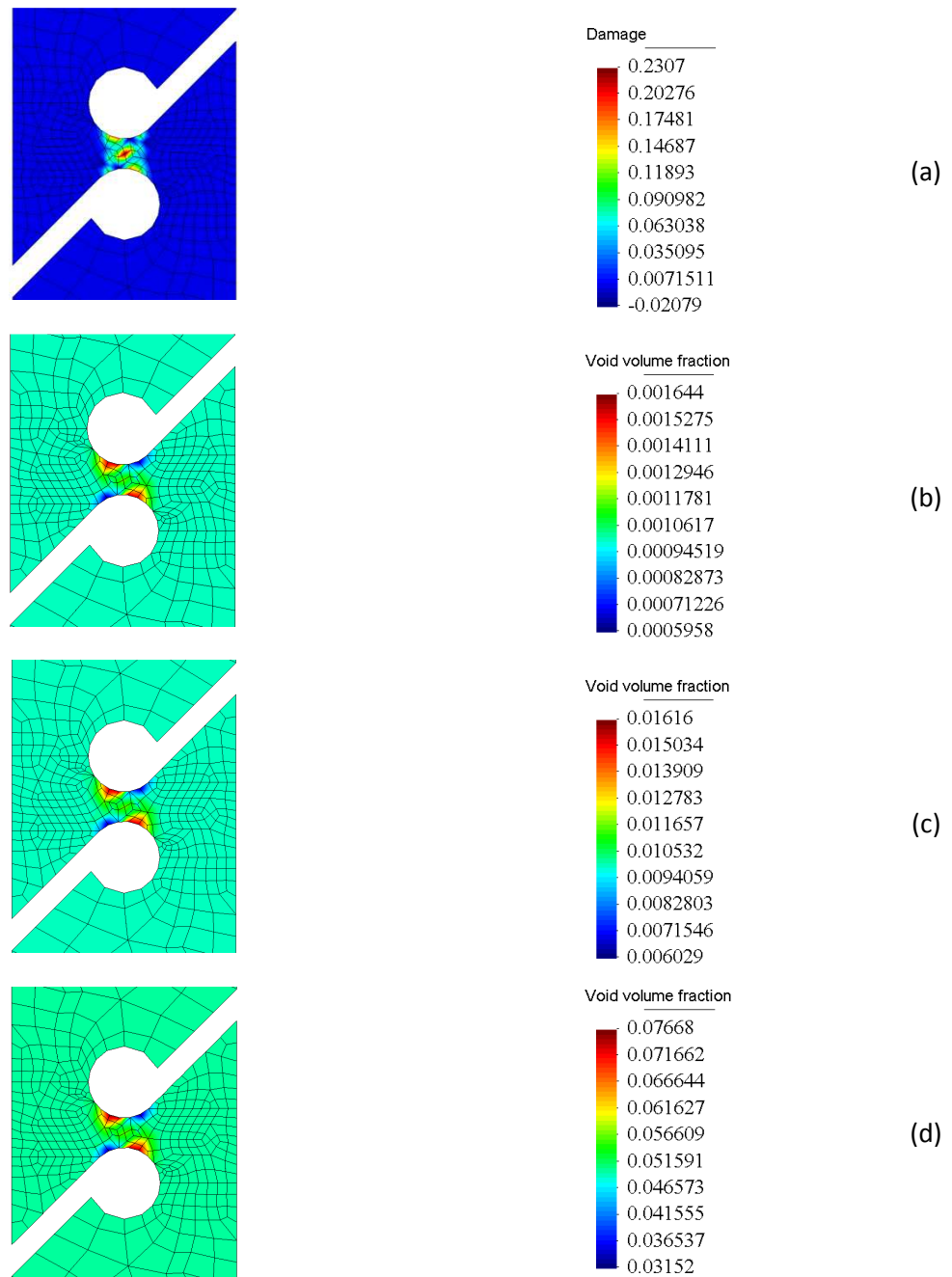


Figura 4.25. Distribuição da variável de dano para o provete de corte para um deslocamento prescrito de 2.4 mm. (a) Lemaître; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.

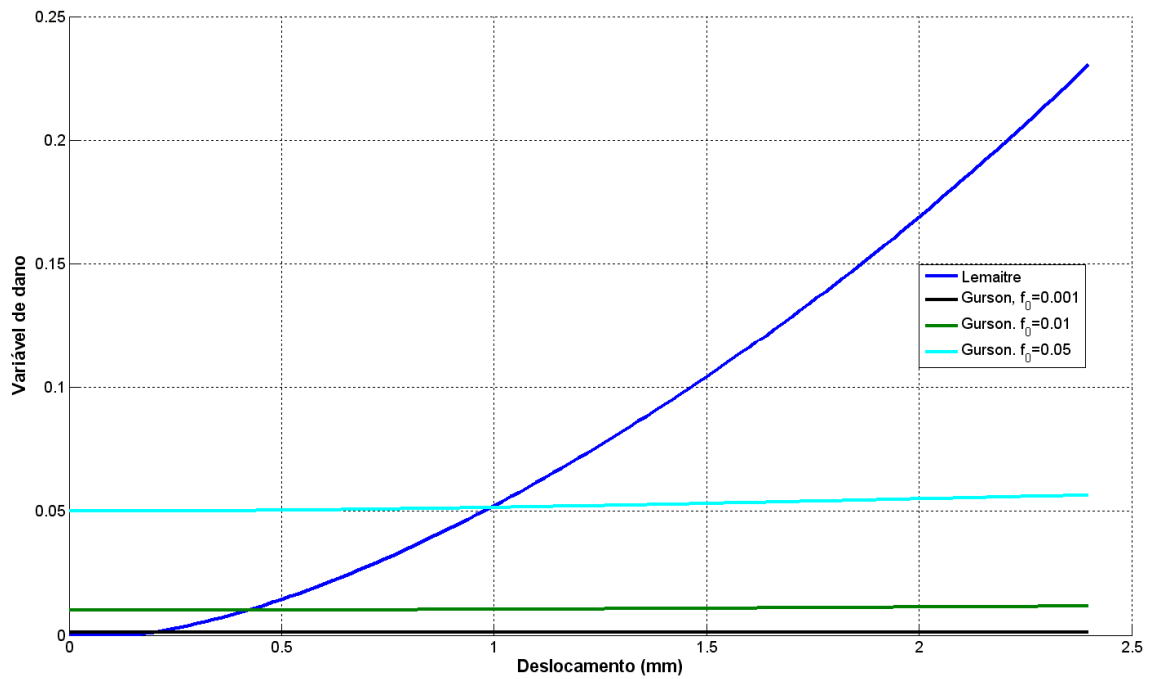


Figura 4.26. Evolução da variável de dano no ponto crítico do provete de corte.

A distribuição e a evolução da deformação plástica encontram-se nas figuras seguintes. Ao contrário da variável de dano, ambos os modelos apresentam a deformação plástica máxima no centro da secção resistente, encontrando-se de acordo com resultados experimentais. No que diz respeito aos valores obtidos para $\bar{\epsilon}_{rot}^p$ este é máximo para o modelo de Lemaître. Porém, ao contrário de todos os ensaios até agora apresentados, ao aumentar a fracção volúmica inicial no modelo de Gurson, menor é $\bar{\epsilon}_{rot}^p$.

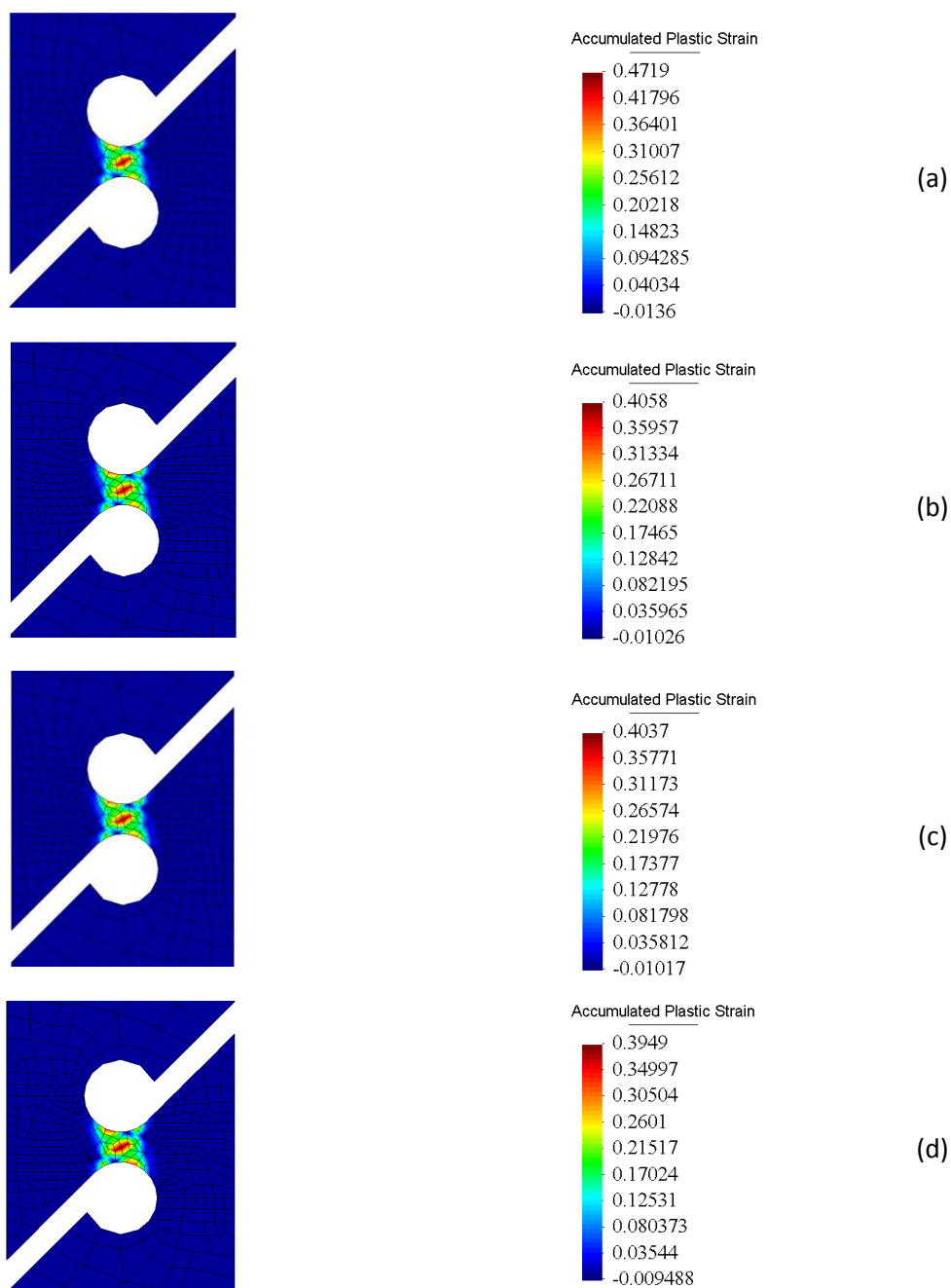


Figura 4.27. Distribuição da deformação plástica acumulada no provete de corte para um deslocamento prescrito de 2.4 mm. a) Lemaitre; b) Gurson, $f_0 = 0.001$; c) Gurson, $f_0 = 0.01$; d) Gurson, $f_0 = 0.05$.

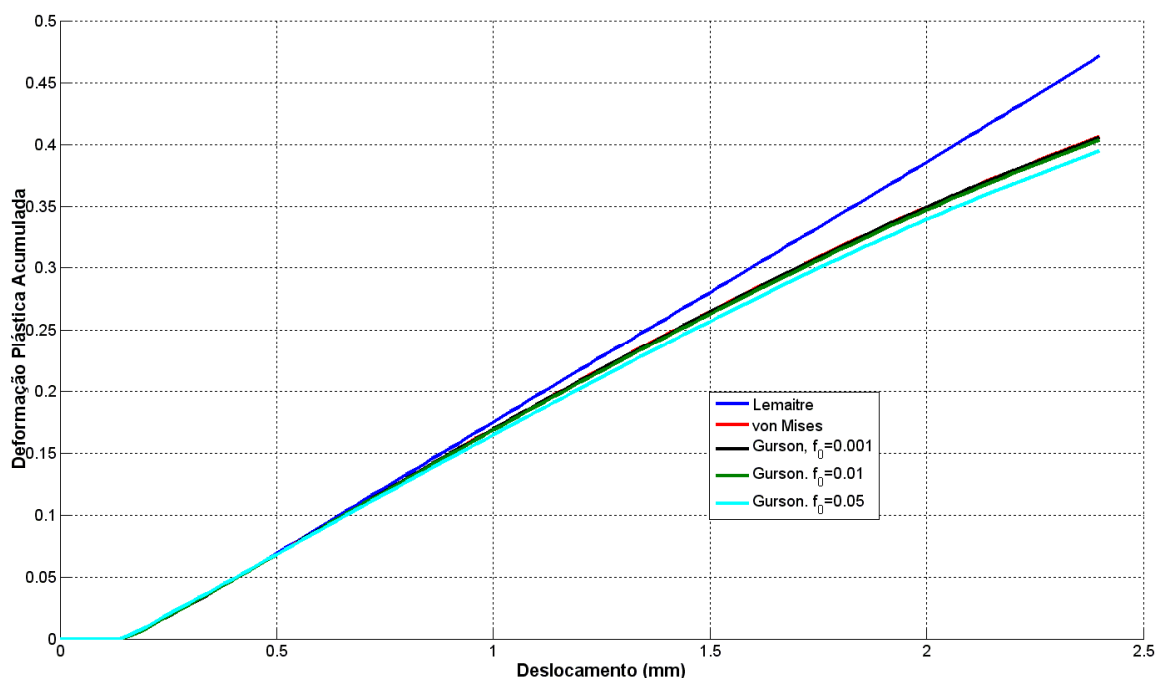


Figura 4.28. Evolução da Deformação plástica no ponto crítico do provete de corte.

Uma vez mais apresenta-se em tabela a deformação plástica acumulada na rotura e o respectivo coeficiente de triaxialidade para os modelos em análise.

Tabela 4.6. Resultados da deformação plástica acumulada na rotura e respectivo coeficiente de triaxialidade obtidos pelas simulações numéricas para os ensaios de corte.

	Lemaitre	von Mises	Gurson, $f_0 = 0.001$	Gurson, $f_0 = 0.01$	Gurson, $f_0 = 0.05$
$\bar{\epsilon}_{rot}^p$	0.4719	0.4061	0.4058	0.4037	0.3949
Γ	0.2574	0.2543	0.2534	0.2462	0.2265

4.3.3.4. Ensaio de tracção em estado plano de deformação – “Flat Grooved”

O último ensaio realizado foi a simulação de uma placa em tracção em estado plano de deformação com um entalhe. Tal como nos provetes cilíndricos de tracção, é no centro da menor secção onde ocorre a rotura. É neste ponto, onde se verifica uma maior nucleação, crescimento e coalescência de vazios, levando o material à rotura.

As Figuras 4.29.a) e 4.29.b) apresentam a geometria e a malha de elementos finitos utilizada. Face aos eixos de simetria do provete, na simulação apenas se considerou um quarto do provete. De forma a manter uniformidade nos ensaios, utilizou-se uma vez mais o elemento quadrático de 8 nós, com integração reduzida.

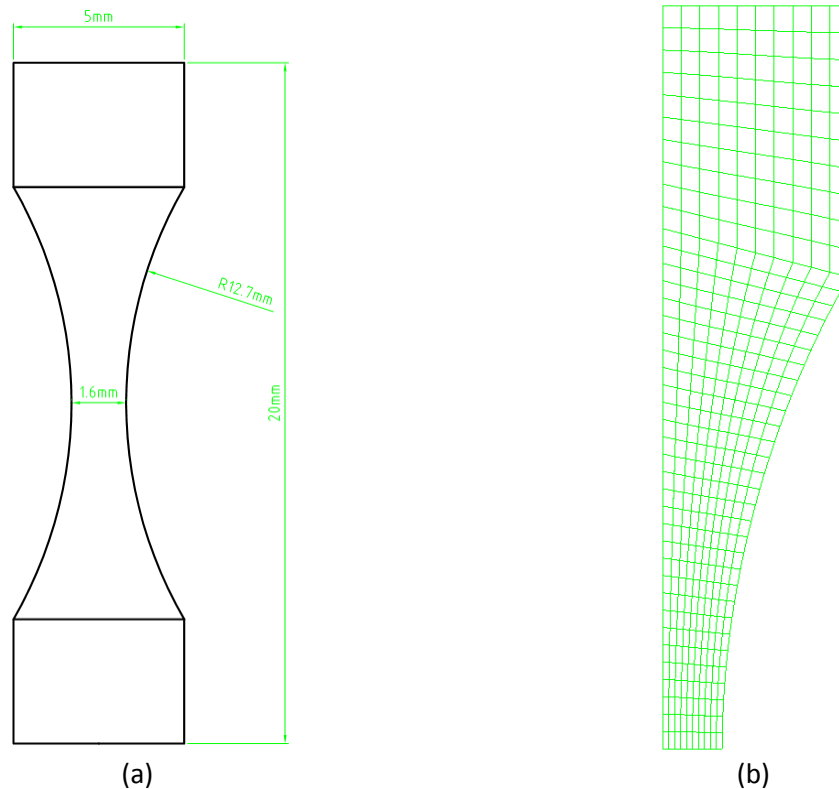


Figura 4.29. Provete para ensaio de tracção em estado plano de deformação (Bai, 2008). a) Geometria do provete. b) Malha de elementos finitos constituída por 400 elementos.

Mantendo a mesma sequência de análise, a Figura 4.30 apresenta as curvas de reacção para os diferentes modelos constitutivos. Tal como nos ensaios de tracção com provetes cilíndricos, à medida que a porosidade inicial aumenta, a capacidade de carga diminui. Um outro aspecto a salientar, na Figura 4.30 é a evolução da curva de reacção associada ao modelo de Lemaitre. Para valores próximos de 0.28 mm a reacção segundo este modelo diminui ligeiramente, iniciando-se o efeito de amolecimento. Note-se que este efeito apenas se verifica no modelo de Lemaitre.

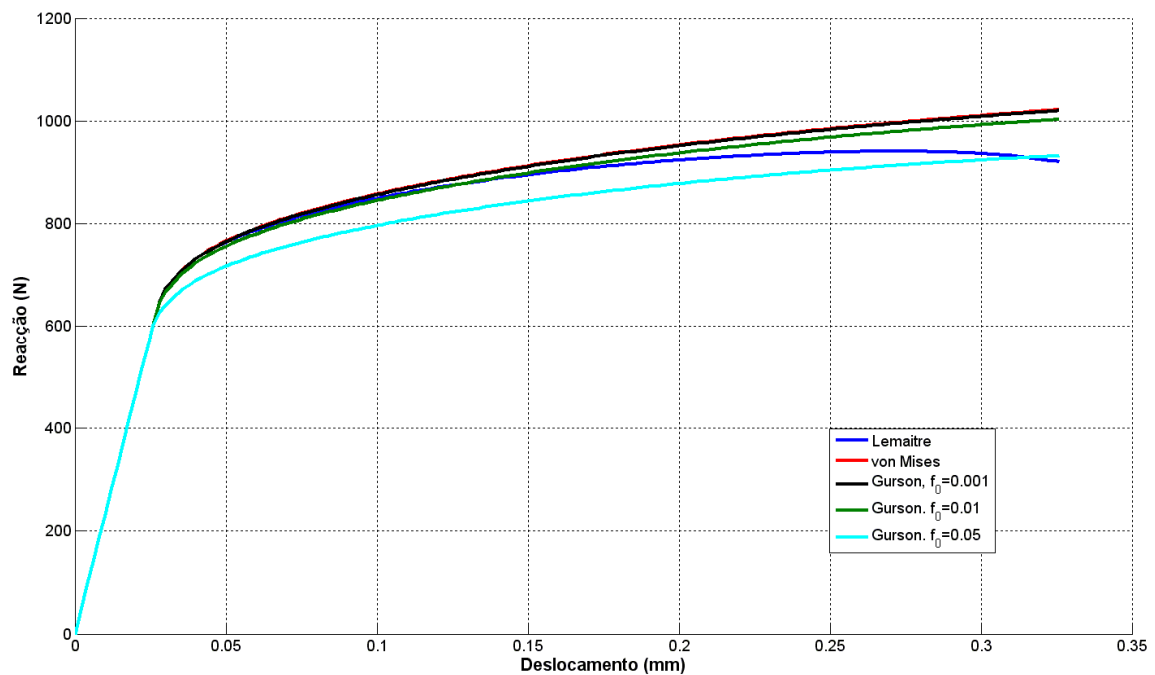


Figura 4.30. Curva de reacção do ensaio de tracção em estado plano de deformação.

A Figura 4.31 apresenta a distribuição das variáveis de dano dos vários modelos para um deslocamento prescrito de 0.326 mm . Como é possível constatar, ambos os modelos indicam que a fractura ocorre no centro do provete. Este dado encontra-se de acordo com dados experimentais. Porém, verifica-se que a variável de dano do modelo de Lemaitre, encontra-se extremamente concentrada no ponto de rotura, ao contrário do modelo de Gurson, que apresenta praticamente toda a secção de menor área danificada.

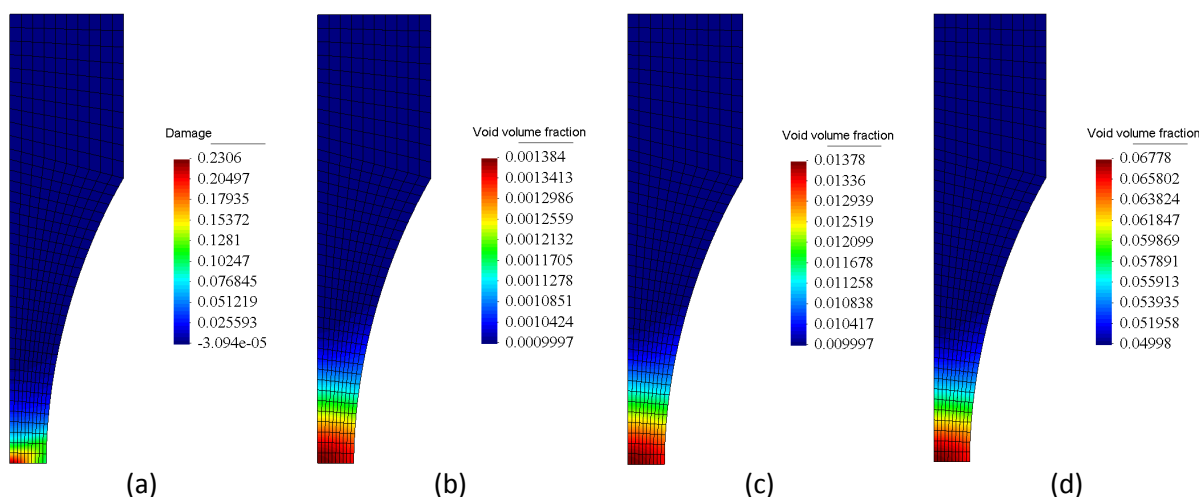


Figura 4.31. Distribuição da variável de dano no provete de tracção em estado plano de deformação para um deslocamento prescrito de 0.326 mm . a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.

No que diz respeito à deformação plástica acumulada, o valor máximo ocorre no ponto onde o modelo indica a inicialização de fractura. A Figura 4.32. apresenta a distribuição de $\bar{\epsilon}^p$. Analisando a Figura 4.32. a) verifica-se que o modelo de Lemaitre concentra a deformação plástica acumulada no ponto crítico. Por sua vez, o modelo de Gurson apresenta toda a secção mínima bastante plastificada, embora $\bar{\epsilon}^p$ seja máximo no interior.

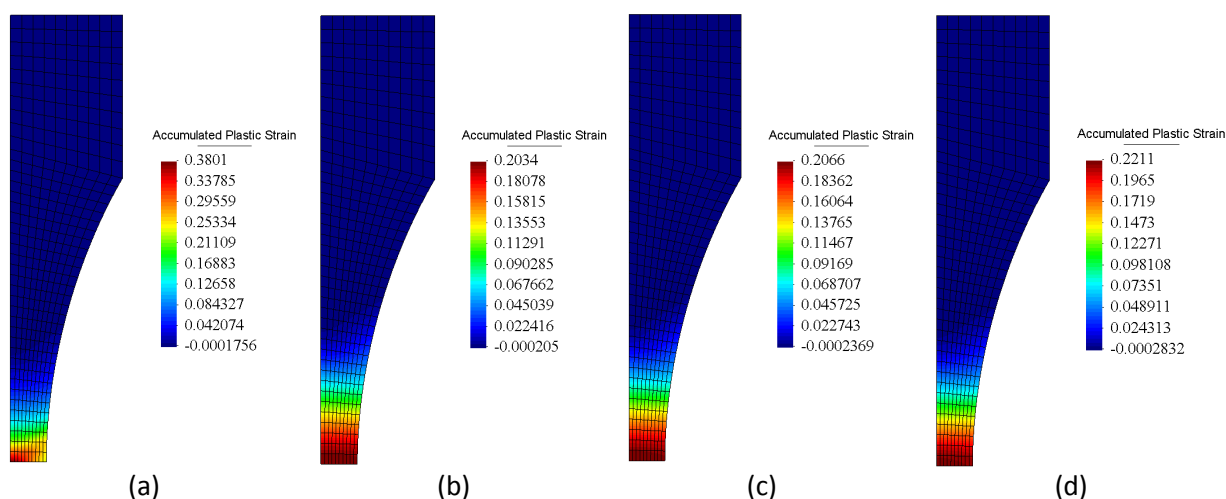


Figura 4.32. Distribuição da deformação plástica acumulada no provete de tracção em estado plano de deformação para um deslocamento prescrito de 0.326 mm . a) Lemaitre; (b) Gurson, $f_0 = 0.001$; (c) Gurson, $f_0 = 0.01$; (d) Gurson, $f_0 = 0.05$.

A Tabela 4.7. apresentam os valores de $\bar{\epsilon}_{rot}^p$ e Γ para o provete em análise.

Tabela 4.7. Resultados da deformação plástica acumulada na rotura e respectivo coeficiente de triaxialidade obtidos pelas simulações numéricas para o ensaio de tracção em estado plano de deformação.

	Lemaitre	von Mises	Gurson, $f_0 = 0.001$	Gurson, $f_0 = 0.01$	Gurson, $f_0 = 0.05$
$\bar{\varepsilon}_{rot}^p$	0.3801	0.2030	0.2034	0.2066	0.2211
Γ	0.7661	0.6202	0.6200	0.6186	0.6130

4.3.4. Curva deformação plástica acumulada na rotura *versus* coeficiente de triaxialidade

A Figura 4.33 apresenta a curva da deformação plástica acumulada na rotura em função do coeficiente de triaxialidade dos resultados numéricos anteriormente apresentados.

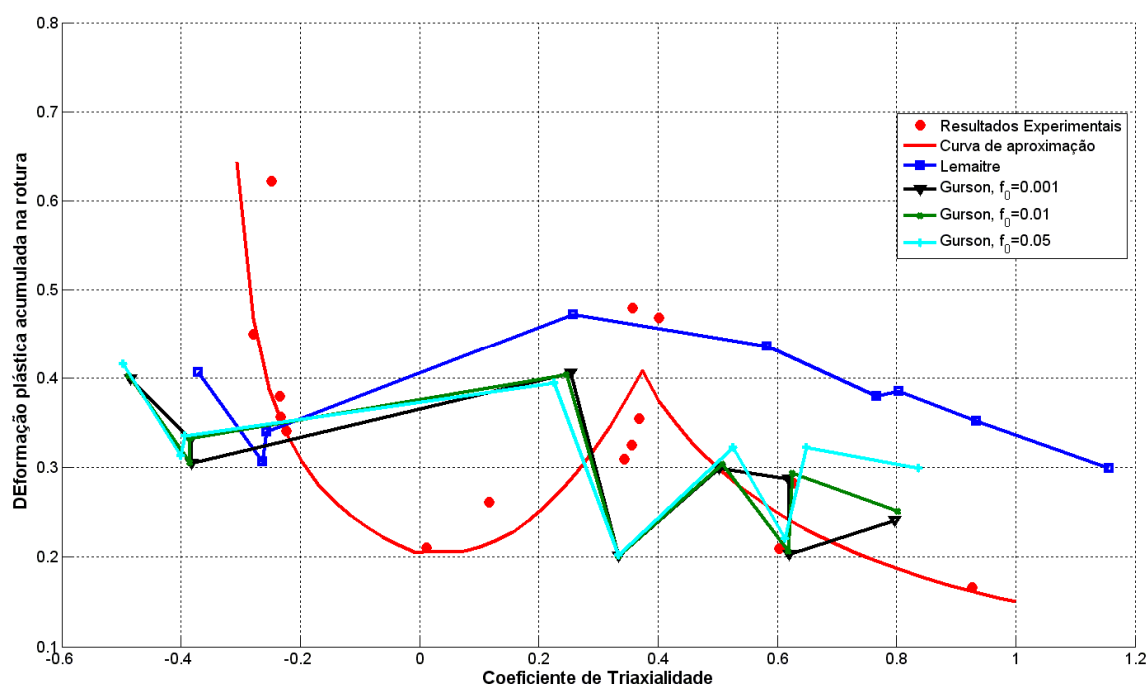


Figura 4.33. Curva deformação plástica acumulada na rotura *versus* coeficiente de triaxialidade resultante das simulações numéricas.

O primeiro aspecto que ressalta das curvas da Figura 4.33 são as evoluções de $\bar{\varepsilon}_{rot}^p(\Gamma)$ dos modelos constitutivos analisados que não coincidem com os resultados publicados por Wierzbicki e a sua equipa.

Iniciando a análise dos resultados numéricos obtidos pelo modelo de Lemaitre, verifica-se que a evolução da deformação plástica na rotura em função do coeficiente de triaxialidade pode ser aproximada por uma curva suave, sem a presença de descontinuidades. Este resultado vem ao encontro com a solução analítica proposta por Teng (Teng, 2008). Para a gama de triaxialidade associada a ensaios de tracção, embora os valores obtidos de $\bar{\varepsilon}_{rot}^p$ sejam superiores aos experimentais, verifica-se que ambas as evoluções são similares, ou seja, à medida que o coeficiente de triaxialidade aumenta a deformação plástica na rotura diminui, revelando uma diminuição da ductilidade do material. Porém, nas gamas do coeficiente de triaxialidade associadas aos ensaios de compressão e corte, este modelo não consegue descrever os resultados experimentais. No caso de corte puro, o coeficiente de triaxialidade obtido foi de 0.2574, encontrando-se extremamente afastado do valor teórico: 0. Para além disto, verifica-se que a ductilidade é máxima neste ensaio. No caso dos ensaios de compressão, foi possível verificar que este modelo indica incorrectamente o

ponto onde ocorre rotura, o que por si só revela as debilidades deste modelo. Relembrando a equação da evolução da variável de dano do modelo de Lemaitre (Eq. 3.21) constata-se que \dot{D} é dependente do quadrado de Γ . Como consequência desta relação, a evolução de \dot{D} é insensível ao sinal de Γ , não permitindo ao modelo distinguir tracção de compressão. Esta análise permite-nos concluir que este modelo foi desenvolvido para análise do dano para coeficientes de triaxialidade altos.

$$\dot{D} = \left\{ \frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1-D)^2 S_0} \left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)(\Gamma)^2 \right] \right\}^{S_0} \dot{\epsilon}^p \quad (4.13)$$

Relativamente ao modelo de Gurson, a sua análise é mais complexa. Na gama de triaxialidades negativas, associadas aos ensaios de compressão, foi possível concluir na secção 4.3.3.2 que a variável f não permite indicar correctamente o ponto de fractura. Na realidade, este resultado não é inesperado. A variável de dano do modelo de Gurson trata-se da fracção volúmica de cavidades simples, sem nenhum efeito de corte. Em compressão, como é perfeitamente compreensível, o material fica mais denso, levando a que a fracção volúmica de defeitos diminua, ou seja, em termos puramente numéricos, não se verifica a danificação interna do material.

No caso do ensaio de corte, tal como no modelo de Lemaitre o coeficiente de triaxialidade obtido encontra-se afastado do valor experimental. A variável de dano do modelo original de Gurson, f é dependente da pressão hidrostática, p . Esta variável, em corte puro é praticamente nula (daí o facto do coeficiente de triaxialidade ser aproximadamente nulo neste tipo de solicitações), inviabilizando a evolução da variável de dano. A título de curiosidade, simulou-se um estado de corte puro apenas com um elemento finito de quatro nós com uma porosidade inicial de 0.001. Como é possível pela Figura 4.34, a fracção volúmica não se alterou ao longo do carregamento. Face a estes resultados, bem como a alguns resultados experimentais que indicam que a rotura em compressão é dependente do efeito de corte, pode-se concluir que existe a necessidade de incorporar no modelo original de Gurson um efeito de corte.

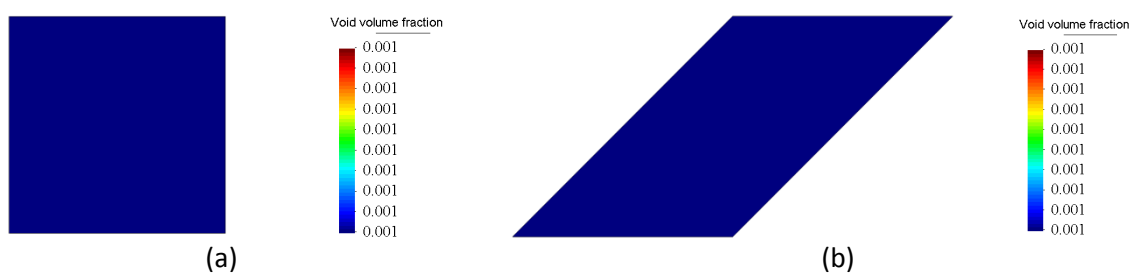


Figura 4.34 - Simulação de corte puro num elemento de quatro nós. a) Fracção volúmica no estado inicial; b) Fracção volúmica no estado final.

Ao contrário dos ensaios de corte e compressão, nos ensaios de tracção verifica-se alguma dependência dos resultados de $\bar{\epsilon}_{rot}^p$ em função de f_0 . À medida que a porosidade inicial aumenta e para o mesmo deslocamento prescrito, a deformação plástica na rotura é superior. Nesta gama de triaxialidades, o modelo de Gurson apresenta uma descontinuidade (Fig. 4.33). Esta deve-se aos resultados obtidos no ensaio de tracção em estado plano de deformação (secção 4.3.3.4). Porém, analisando com algum cuidado a Figura 4.33 e em particular os resultados experimentais, verifica-se também a existência de uma descontinuidade pelos mesmos motivos. Note-se também, que no caso dos provetes cilíndricos com entalhe, os resultados são interessantes. Isto permite-nos afirmar, que o modelo original de Gurson, embora não possuindo um mecanismo de nucleação e coalescência de

defeitos nesta gama de triaxialidade apresenta melhores resultados que o modelo original de Lemaitre.

Após a análise dos resultados do modelo de Gurson pode-se levantar uma questão. Tal como já foi referido na secção 4.2.1. os resultados publicados por Wierzbicki resultaram de uma comparação entre ensaios experimentais e as respectivas simulações com o modelo de von Mises. De acordo com a formulação do modelo de Gurson, no caso de porosidades muito baixas, este consiste no próprio modelo de von Mises (isto encontra-se devidamente justificado nas curvas de reacção apresentadas nas secções anteriores). Face a estes dados, esperava-se obter sobretudo nos ensaios de corte onde $f_0 = 0.001$ valores de $\bar{\epsilon}_{rot}^p$ e Γ similares aos experimentais. Porém, esta diferença deve-se à forma como os provetes forma simulados. Neste trabalho, o ensaio de corte foi simulado em estado plano de deformação, enquanto Wierzbicki recorreu a um modelo 3D, permitindo obter valores do coeficiente de triaxialidade claramente inferiores.

Por último, interessa tecer alguns comentários ao procedimento utilizado. O método adoptado para a comparação dos modelos é empírico, podendo suscitar algumas questões. O primeiro aspecto é relativo às propriedades mecânicas utilizadas da liga de alumínio. Tal como já foi referido, as propriedades provêm de alguns ensaios experimentais publicados. O ideal, seria ao longo deste trabalho efectuar a calibração desta liga para cada modelo, e não utilizar a mesma lei de endurecimento para ambos. Uma outra possível questão é a definição de deslocamento prescrito crítico. É óbvio que, se o modelo de Lemaitre falha na caracterização da rotura num ensaio, os resultados associados ao modelo de Gurson poderão não ser os mais correctos. De forma a ultrapassar esta questão, ao longo deste trabalho foram pesquisados resultados experimentais em que simultaneamente fossem fornecidas informações quanto à geometria, propriedades do material, e deslocamento na rotura. Todavia, foram raros os casos onde se encontraram toda esta informação, tornando o método de análise e comparação mais vulnerável a erros e incoerências. Por último, seria interessante possuir um maior número de ensaios para simulação de corte puro e de compressão, de forma a consolidar os resultados obtidos. Porém, os exemplos possíveis de serem simulados encontram-se limitados a casos 2D. Caso o programa de elementos finitos ("*Hyplas*") permitisse a simulação de provetes em 3D, seria possível simular o provete denominado "*Borboleta*" publicado por Wierzbicki e a sua equipa (Bai, 2008) (Bao, 2003). Alterando o ângulo de carregamento, podemos simular diferentes estados de tensão: corte puro, combinação corte/tracção. Face a esta análise crítica do método, pode-se concluir no entanto, que os resultados apresentados permitem avaliar com coerência as evoluções da deformação plástica acumulada na rotura em função do coeficiente de triaxialidade.

4.4. Conclusões

Neste capítulo foi apresentada a curva $\bar{\epsilon}_{rot}^p(\Gamma)$ para os modelos originais de Lemaitre e Gurson. Por comparação dos resultados numéricos com os experimentais obtidos por Wierzbicki foi possível verificar a incapacidade destes dois modelos descreverem a rotura em provetes onde efeitos de corte apresentam um papel fundamental.

Foi possível também constatar que os dois modelos apresentam um desempenho insatisfatório em ensaios de compressão, na medida em que, para além de não indicarem correctamente o ponto onde efectivamente ocorre a rotura, não cumprem o valor "*cut-off*" do coeficiente de triaxialidade de $-1/3$.

Introdução do efeito de Corte no modelo original de Gurson

5.1. Introdução

No capítulo anterior foram demonstradas as dificuldades que o modelo original de Gurson apresenta na caracterização da rotura de um sólido em estados de tensão onde a componente de corte apresenta um papel importante. Nestes casos, a variável de dano associada (fracção volúmica, f) praticamente não evolui. Face a estas conclusões, pretende-se neste capítulo introduzir um efeito de corte na variável de dano deste modelo.

Na secção 5.2 é apresentado o efeito de corte a introduzir. Este é exclusivo para corte puro, sendo necessário introduzir um mecanismo que, de acordo com o tipo de solicitação, permita quantificar o efeito de corte presente (secção 5.3). Na secção 5.4 é definida a forma como este mecanismo é introduzido no modelo original, e sendo apresentadas as várias leis que definem o novo modelo: *lei de encruamento*, *lei de escoamento*.

Com base nas equações que regem o novo modelo, foram desenvolvidos algoritmos para a implementação do novo modelo (secção 5.5). Na secção 5.5.1 é apresentado o algoritmo de actualização do estado e na secção 5.5.3. a expressão para o cálculo da matriz tangente consistente.

Por último, ao longo da secção 5.6 são expostos os resultados associados ao novo modelo.

5.2. Efeito de Corte

Para analisar o efeito de corte a que uma cavidade inicialmente circular se encontra sujeita, considere-se em 2D, a seguinte célula quadrada representada na Figura 5.1 a).

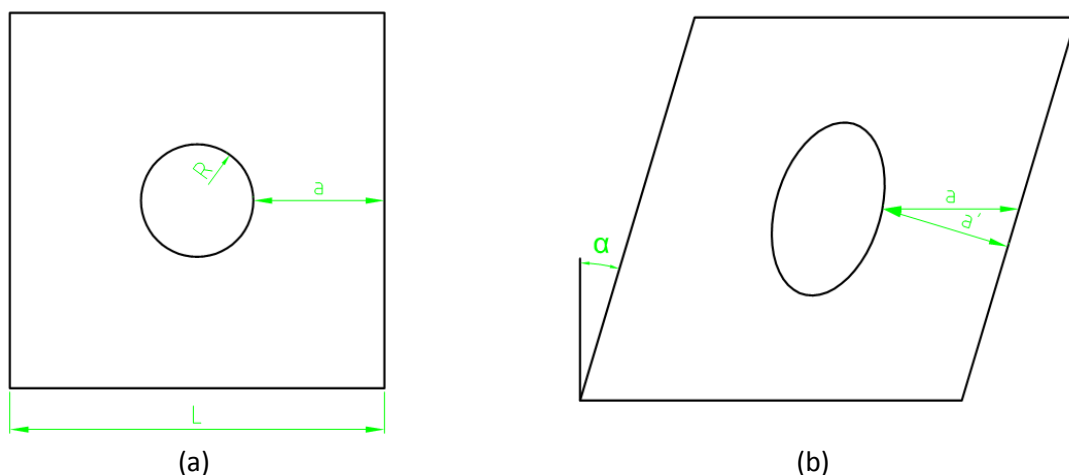


Figura 5.1 - Elemento representativo. a) Estado inicial; b) Estado final após solicitação de corte.

De acordo com a figura anterior, a distância mínima entre as fronteiras da célula e da cavidade a é dada pela equação (5.1), onde L e R são respectivamente, o comprimento da célula e o raio da cavidade.

$$a = \frac{L}{2} - R \quad (5.1)$$

Submetendo a célula a um estado de corte puro, a cavidade inicialmente circular adquire uma configuração final semelhante a uma elipse. Este estado de corte pode ser caracterizado pela deformação de corte, ε_{corte} , definida pelo ângulo α (Fig. 5.1 b) da seguinte forma:

$$\tan(\alpha) = \varepsilon_{corte} \quad (5.2)$$

Como é fácil de compreender, à medida que a deformação de corte aumenta, a distância mínima entre fronteiras diminui. De acordo com a lei da conservação de volume, pode-se assumir que a posição relativa entre a cavidade e a célula não se altera, independentemente do estado de deformação. Face a este pressuposto, no caso da configuração deformada pode-se definir uma distância mínima entre fronteiras a'

$$a' = a \cos(\alpha) \quad (5.3)$$

Após alguma manipulação algébrica e tendo em conta considerações geométricas, a equação (5.3) pode ser reescrita da seguinte forma

$$a' = a \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon_{corte}^2}} \quad (5.4)$$

Tendo por base a definição de deformação logarítmica, é possível definir uma deformação de rotura, ε_{rot} associada à redução da distância mínima entre fronteiras.

$$\varepsilon_{rot} = \log \frac{a}{a'} = \log \sqrt{1 + \varepsilon_{corte}^2} \quad (5.5)$$

No caso de pequenas deformações de rotura pode-se assumir que

$$\varepsilon_{rot} = \frac{1}{2} \varepsilon_{corte}^2 \quad (5.6)$$

Definida a deformação de rotura artificial, é possível obter uma variável de dano associada ao efeito de corte a que uma cavidade se encontra submetida por comparação com a deformação máxima possível, $\varepsilon_{m\acute{a}x}$. Esta deformação ocorre quando a superfície da cavidade intersecta a fronteira da célula, sendo caracterizada pela equação (5.7).

$$\varepsilon_{m\acute{a}x} = \log \left(\frac{L}{2R} \right) \quad (5.7)$$

Considerando as equações (5.6) e (5.7), define-se D_{corte} do seguinte modo

$$D_{corte} = \frac{\frac{1}{2} \varepsilon_{corte}^2}{\log \frac{L}{2R}} \quad (5.8)$$

Aplicando a definição de fracção volúmica à célula, pode-se escrever

$$f = \frac{\pi R^2}{L^2} \quad (5.9.a)$$

$$\frac{L}{R} = \sqrt{\frac{\pi}{f}} \quad (5.9.b)$$

Introduzindo a relação anterior em (5.8), a variável D_{corte} é reescrita da seguinte forma

$$D_{corte} = \frac{\frac{1}{2} \varepsilon_{corte}^2}{\log \sqrt{\frac{\pi}{4f}}} \quad (5.10)$$

Aplicando a expansão de Taylor ao denominador da equação anterior de forma a remover o logaritmo resulta:

$$D_{corte} = \frac{\frac{1}{2} \varepsilon_{corte}^2}{\sqrt{\frac{\pi}{4f}} - 1} \quad (5.11)$$

Considerando pequenas fracções volúmicas e tendo em conta que no caso de corte puro $\varepsilon_{corte} = \sqrt{3} \varepsilon_{eq}$, onde ε_{eq} consiste na deformação equivalente (contemplando as componentes elástica e plástica do tensor das deformações), a equação (5.11) pode ser aproximada da seguinte forma:

$$D_{corte} = \frac{3}{\sqrt{\pi}} f^{0.5} \varepsilon_{eq}^2 \quad (5.12)$$

Note-se que na última simplificação efectuada à variável de dano desprezou-se o efeito de " − 1" do denominador da equação (5.11). Esta simplificação teve como objectivo remover a descontinuidade presente na equação (5.11), facilitando a sua implementação numérica. Embora esta simplificação acarrete alguns erros, para pequenas fracções volúmicas estes não são significativos

Diferenciando a equação anterior relativamente a ε_{eq} encontramos a evolução da variável de dano associada a corte puro.

$$dD_{corte} = \frac{3}{\sqrt{\pi}} f^{0.5} \varepsilon_{eq} d\varepsilon_{eq} \quad (5.13)$$

5.3. Dependência do ângulo de *Lode* normalizado

A expressão anterior é exclusiva para corte puro. Porém, como já foi referido ao longo deste documento, é usual encontrarmos estados de tensão que resultam da combinação de corte/tracção e corte/compressão. De forma a ser possível quantificar o efeito de corte presente, é necessário introduzir na equação (5.13) uma nova variável que traduza esta combinação de estados de tensão. Assim sendo, a equação (5.13) será reescrita da seguinte forma

$$dD_{corte} = \frac{3}{\sqrt{\pi}} f^{0.5} \varepsilon_{eq} d\varepsilon_{eq} g \quad (5.14)$$

onde g será uma função que varia entre 0 e 1. No caso de corte puro, g será igual a 1, e, no caso de tracção pura, igual 0. Uma forma de caracterizar a função g será defini-la em função do estado desviador.

O ângulo de *Lode* é, por si só, uma função do tensor desviador das tensões, \mathbf{s} . Em termos de representação geométrica, este ângulo consiste no menor ângulo entre a projecção de \mathbf{s} e a linha de corte puro no plano desviador. Em termos de definição analítica não existe unanimidade sendo possível encontrar algumas variantes dependendo do autor. Bai (Bai, 2008) define o ângulo de *Lode*, θ da seguinte forma

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{27 \det(\mathbf{s})}{2 \sigma_{eq}^3} \right) \quad (5.15)$$

verificando-se que θ varia entre 0 e $\frac{\pi}{3}$. Note-se que a equação anterior é dependente do terceiro invariante do tensor desviador, isto porque $\det(\mathbf{s}) = J_3$.

No entanto, não é com esta definição que Bai avalia o estado de tensão num sólido. Para isso, define o ângulo de *Lode* normalizado, $\bar{\theta}$.

$$\bar{\theta} = 1 - \frac{6\theta}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{27 \det(\mathbf{s})}{2 \sigma_{eq}^3} \right) \quad (5.16)$$

Neste caso, $\bar{\theta}$ varia entre -1 e 1 . De acordo com $\bar{\theta}$ encontramos diferentes estados de tensão. A Figura 5.2 apresenta a evolução de $\bar{\theta}$ para diferentes carregamentos.

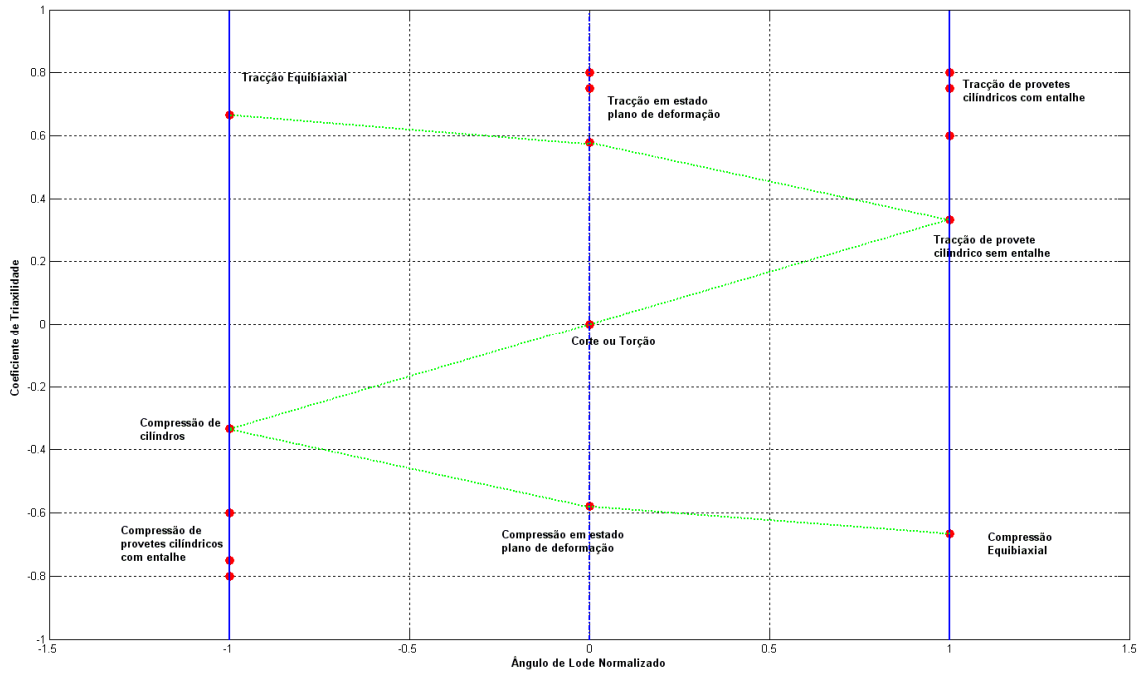


Figura 5.2. Representação do coeficiente de triaxialidade em função do ângulo normalizado de Lode para estados iniciais de tensão (Bai, 2008).

De acordo com o diagrama apresentado na Figura 5.2 constata-se que nos casos de corte puro e estado plano de deformação, $\bar{\theta}$ é igual a 0. Em casos de tracção e compressão axissimétricos $\bar{\theta}$ é igual a 1 e -1 respectivamente. Note-se que os valores apresentados na Figura 5.2 são relativos apenas ao estado inicial do ensaio, alterando-se à medida que decorre o carregamento. Face a estes dados e uma vez que se pretende, no caso de corte puro, introduzir o efeito de corte desenvolvido na secção 5.2, a função g consistirá em

$$g_{\theta} = 1 - |\bar{\theta}| = 1 - \left| 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \left(\frac{27 \det(s)}{2 \sigma_{eq}^3} \right) \right| \quad (5.17)$$

5.4. Introdução da variável de dano no modelo original de Gurson

Para a introdução do efeito de corte no modelo original de Gurson, a variável de dano original, f é substituída por D . Esta nova variável de dano contempla a evolução da fracção volúmica do modelo original (Eq. 3.33), bem como a componente de dano associada ao corte. A sua evolução é descrita pelas equações (5.18.a) e (5.18.b)).

$$\dot{D} = \dot{f} + \dot{D}_{corte} \quad (5.18.a)$$

$$\dot{D} = \dot{\gamma} (f - f^2) (k + \sigma_{y0}) \sinh \left(\frac{3p}{2(k + \sigma_{y0})} \right) + \frac{3}{\sqrt{\pi}} f^{0.5} \varepsilon_{eq} \dot{\varepsilon}_{eq} g_{\theta} \quad (5.18.b)$$

A função de cedência do modelo de Gurson com efeito de corte escreve-se da seguinte forma:

$$\Phi = J_2(\mathbf{s}) - \frac{1}{3} \left\{ 1 + D^2 - 2D \cosh \left[\frac{3p}{2(k + \sigma_{y0})} \right] \right\} (k + \sigma_{y0})^2 \quad (5.19)$$

Tal como no modelo original, este modelo é associativo e, como tal, a lei de encruamento e de escoamento são obtidas recorrendo às equações (2.18) e (2.23). Aplicando estas leis, resultam as equações (5.20) e (5.21).

$$\begin{aligned} \dot{R} &= -\dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial k} \\ &= \frac{\dot{\gamma} \frac{2}{3} (k + \sigma_{y0}) \left\{ 1 + D^2 - 2D \cosh \left[\frac{3p}{2(k + \sigma_{y0})} \right] \right\} + \dot{\gamma} D \cdot p \cdot \sinh \left(\frac{3p}{2(k + \sigma_{y0})} \right)}{1 - D} \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \left[\mathbf{s} + \frac{1}{3} D (k + \sigma_{y0}) \sinh \left[\frac{3p}{2(k + \sigma_{y0})} \right] \mathbf{I} \right] \quad (5.21)$$

O Quadro 5.1 apresenta as principais leis que descrevem o modelo de Gurson com efeito de corte.

⁴ A introdução do denominador "1 - D" tem como objectivo introduzir o efeito de degradação do material, fazendo com que a variável associada ao encruamento do material aumente à medida que D também aumenta.

Quadro 5.1 - Modelo de Gurson com efeito de corte.

(i)	Divisão do tensor das deformações	$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$
(ii)	Lei Elástica	$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$
(iii)	Função de Cedência	$\Phi = J_2(\mathbf{s}) - \frac{1}{3} \left\{ 1 + D^2 - 2D \cosh \left[\frac{3p}{2(k + \sigma_{y0})} \right] \right\} (k + \sigma_{y0})^2$
(iv)	Lei de escoamento	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \left[\mathbf{s} + \frac{1}{3} D (k + \sigma_{y0}) \sinh \left[\frac{3p}{2(k + \sigma_{y0})} \right] \mathbf{I} \right]$
(v)	Lei de encruamento	$\dot{R} = -\dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial k} = \frac{\dot{\gamma} \frac{2}{3} (k + \sigma_{y0}) \left\{ 1 + D^2 - 2D \cosh \left[\frac{3p}{2(k + \sigma_{y0})} \right] \right\} + \dot{\gamma} D p \cdot \sinh \left(\frac{3p}{2(k + \sigma_{y0})} \right)}{1 - D}$
(vi)	Lei de evolução da variável de dano, D	$\dot{D} = \dot{f} + \dot{D}_{corte}$
(vii)	Lei de evolução da fracção volúmica	$\dot{f} = \dot{\gamma} (f - f^2) (k + \sigma_{y0}) \sinh \left(\frac{3p}{2(k + \sigma_{y0})} \right)$
(viii)	Lei da evolução da componente de corte da variável de dano	$\dot{D}_{corte} = \frac{3}{\sqrt{\pi}} f^{0.5} \varepsilon_{eq} \dot{\varepsilon}_{eq} g_{\bar{\theta}}$
Onde		$g_{\bar{\theta}} = 1 - \bar{\theta} $
		$\bar{\theta} = 1 - \frac{6\theta}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \left(\frac{27 \det(\mathbf{s})}{2 \sigma_{eq}^3} \right)$
(ix)	Critério de carregamento / não carregamento	$\Phi \leq 0 \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad \Phi \dot{\gamma} = 0$

O novo modelo não apresenta nenhum efeito de nucleação. Tal como no modelo original de Gurson, será necessário introduzir uma porosidade inicial. No entanto, relativamente à componente de corte da variável de dano, esta apresenta valor nulo no início de cada ensaio.

5.5. Algoritmo

Definidas as evoluções das variáveis internas do modelo a implementar, pretende-se nesta secção apresentar um algoritmo de integração implícito para a actualização das tensões. Para além deste algoritmo, será apresentado um procedimento para a obtenção analítica da matriz tangente consistente. Estes dois algoritmos serão directamente introduzidos na estrutura do *Hyplas*.

5.5.1. Algoritmo de actualização das tensões

O primeiro passo a realizar para a actualização das tensões e variáveis internas é a discretização das equações diferenciais que caracterizam o modelo (equações (3.33), (5.18.b), (5.20) e (5.21)).

Entre vários métodos possíveis para a discretização, foi utilizado o método “Barckward” de Euler, descrito no anexo B. Aplicando este método obtemos

$$D_{n+1} = D_n + \Delta\gamma \sinh \left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right] (f_{n+1} - f_{n+1}^2) \sigma_y(R_{n+1}) + \frac{3}{\sqrt{\pi}} f_{n+1}^{0.5} \varepsilon_{eq,n+1} \Delta \varepsilon_{eq,n+1} g_{\bar{\theta}_{n+1}} \quad (5.22)$$

$$R_{n+1} = R_n + \frac{\Delta\gamma}{1 - D_{n+1}} \left[\frac{2}{3} \left\{ 1 + D_{n+1}^2 - 2D_{n+1} \cosh \left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right] \right\} [\sigma_y(R_{n+1})] + p_{n+1} D_{n+1} \sinh \left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right] \right] \quad (5.23)$$

$$f_{n+1} = f_n + \Delta\gamma \sinh \left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right] (f_{n+1} - f_{n+1}^2) \sigma_y(R_{n+1}) \quad (5.24)$$

$$\varepsilon_{p,n+1} = \varepsilon_{p,n} + \Delta\gamma \left[s_{n+1} + \frac{1}{3} D_{n+1} \sigma_y(R_{n+1}) \sinh \left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right] \mathbf{I} \right] \quad (5.25)$$

A actualização das deformações, neste modelo é dada por

$$\varepsilon_{n+1}^e = \varepsilon_{n+1}^{e\,trial} - \Delta \varepsilon_{n+1}^p \quad (5.26.a)$$

$$\varepsilon_{n+1}^e = \varepsilon_{n+1}^{e\,trial} - \Delta\gamma \left[s_{n+1} + \frac{1}{3} D_{n+1} \sigma_y(R_{n+1}) \sinh \left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right] \mathbf{I} \right] \quad (5.26.b)$$

Como é possível verificar, a equação (5.26.b) pode ser decomposta na componente volumétrica e desviadora da seguinte forma

$$\varepsilon_{n+1,d}^e = \varepsilon_{n+1,d}^{e\,trial} - \Delta\gamma s_{n+1} \quad (5.27)$$

$$\varepsilon_{n+1,v}^e = \varepsilon_{n+1,v}^{e\,trial} - \Delta\gamma \left[D_{n+1} \sigma_y(R_{n+1}) \sinh \left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right] \right] \quad (5.28)$$

onde os índices v e d indicam, respectivamente, a componente volumétrica e desviadora. De acordo com a lei elástica, sabe-se que $\mathbf{s} = 2G\varepsilon_d^e$ e $p = K\varepsilon_v^e$ onde G consiste no módulo de corte e K no módulo de compressibilidade (Silva Gomes, 2004). Substituindo estas relações em (5.26) e (5.27) e após alguma manipulação algébrica resulta

$$\mathbf{s}_{n+1} = \frac{2G}{1 + \Delta\gamma 2G} \varepsilon_{n+1}^{e\,trial} \quad (5.29)$$

$$p_{n+1} = K\varepsilon_{v,n+1}^{e\,trial} - \Delta\gamma D_{n+1} K \sigma_y(R_{n+1}) \sinh \left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right] \quad (5.30)$$

Introduzindo a equação (5.29) na função de cedência obtemos

$$\begin{aligned}
\Phi(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}; \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}) \\
= \left(\frac{2G}{1+2G\Delta\gamma} \right)^2 J_2(\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}) \\
- \frac{1}{3} \left\{ 1 + D_{n+1}^2 - 2D_{n+1} \cosh \left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right] \right\} [\sigma_y(R_{n+1})]^2
\end{aligned} \quad (5.31)$$

Para a caracterização total deste modelo em domínio plástico, é necessário resolver um sistema de equações constituído pelas equações (5.22), (5.23), (5.24), (5.30) e (5.31).

O quadro seguinte apresenta em “pseudo-código” o algoritmo de actualização das tensões.

Quadro 5.2 - Algoritmo de actualização das tensões e variáveis internas do modelo de Gurson com efeito de corte.

<p>(i) Domínio Elástico</p> <p>- Cálculo das tensões hipoteticamente elásticas</p> $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial}$ <p>- Verificar qual o domínio</p> $\Phi^{trial} = J_2(\boldsymbol{s}_{n+1}^{trial}) - \frac{1}{3} \left\{ 1 + D_n^2 - 2D_n \cosh \left[\frac{3p_{n+1}^{trial}}{2\sigma_y(R_n)} \right] \right\} [\sigma_y(R_n)]^2$ <p>Se $\Phi^{trial} \leq 0$</p> $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial}$ $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial}$ $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$	<p>(ii) Domínio Plástico – Resolução de um sistema para determinar as seguintes variáveis: $\Delta\gamma$, D_{n+1}, R_{n+1}, p_{n+1}, f_{n+1}</p> <p>a) Função de Cedência</p> $r_{\Delta\gamma}(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}; \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}) = \left(\frac{2G}{1+2G\Delta\gamma} \right)^2 J_2(\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}) - \frac{1}{3} \left\{ 1 + D_{n+1}^2 - 2D_{n+1} \cosh \left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right] \right\} [\sigma_y(R_{n+1})]^2 = 0$ <p>b) Evolução da pressão</p> $r_p(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}; \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial}) = p_{n+1} - K\varepsilon_{v_{n+1}}^{e\,trial} + \Delta\gamma D_{n+1} K \sigma_y(R_{n+1}) \sinh \left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right] = 0$ <p>c) Evolução da variável de Dano</p> $ \begin{aligned} r_D(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}; \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}, \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial}) \\ = D_{n+1} - D_n - \Delta\gamma \sinh \left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right] (f_{n+1} - f_{n+1}^2) \sigma_y(R_{n+1}) \\ - \frac{3}{\sqrt{\pi}} f_{n+1}^{0.5} \varepsilon_{eq_{n+1}} \Delta\varepsilon_{eq_{n+1}} g_{\bar{\theta}_{n+1}} = 0 \end{aligned} $
--	--

d) Evolução da variável de encruamento

$$\begin{aligned} r_R(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}) &= R_{n+1} - R_n \\ &- \frac{\Delta\gamma}{1 - D_{n+1}} \left[\frac{2}{3} \left\{ 1 + D_{n+1}^2 - 2D_{n+1} \cosh \left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right] \right\} [\sigma_y(R_{n+1})] \right. \\ &\left. + p_{n+1} D_{n+1} \sinh \left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right] \right] = 0 \end{aligned}$$

e) Evolução da fracção volúmica de cavidades

$$r_f(\Delta\gamma, p_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}) = f_{n+1} - f_n - \Delta\gamma \sinh \left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right] (f_{n+1} - f_{n+1}^2) \sigma_y(R_{n+1}) = 0$$

(iii) Actualização das tensões, deformações elásticas e deformações plásticas:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \frac{1}{1 + 2G\Delta\gamma} \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}} + \frac{p_{n+1}}{K} \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \frac{2G}{1 + 2G\Delta\gamma} \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}} + p_{n+1} \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \left[\frac{2G}{1 + \Delta\gamma 2G} \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}} + \frac{1}{3} D_{n+1} \sigma_y(R_{n+1}) \sinh \left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right] \mathbf{I} \right] \end{aligned}$$

5.5.2. Método de *Newton Raphson* aplicado ao modelo constitutivo a implementar

As cinco equações de resíduo que constituem o sistema presente no algoritmo de actualização de tensões são não-lineares. Por este motivo, foi utilizado o método de *Newton-Raphson* para a sua resolução que se encontra descrito no anexo A.

O Quadro 5.3 apresenta o algoritmo em pseudo-código para o método de *Newton-Raphson* aplicado a este modelo.

Quadro 5.3 - Método de *Newton-Raphson* para a resolução do sistema de actualização das variáveis internas no modelo de Gurson com efeito de corte.

1. Inicialização do contador k e inicialização das variáveis

$$\begin{aligned}\Delta\gamma &= 0 \\ p_{n+1} &= p_n \\ D_{n+1} &= D_n \\ R_{n+1} &= R_n \\ f_{n+1} &= f_n\end{aligned}$$

2. Inicialização das funções de resíduo

$$\begin{bmatrix} r_{\Delta\gamma} \\ r_p \\ r_D \\ r_R \\ r_f \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{trial}) - \frac{1}{3} \left\{ 1 + D_n^2 - 2D_n \cosh \left[\frac{3p_{n+1}^{trial}}{2\sigma_y(R_n)} \right] \right\} [\sigma_y(R_n)]^2 \\ 0 \\ D_n \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^5$$

3. Incrementar as iterações do Método de *Newton-Raphson*

4. Cálculo dos incrementos das variáveis

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial R_{n+1}} & \frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial f_{n+1}} \\ \frac{\partial r_p}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial r_p}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial r_p}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial r_p}{\partial R_{n+1}} & \frac{\partial r_p}{\partial f_{n+1}} \\ \frac{\partial r_D}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial r_D}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial r_D}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial r_D}{\partial R_{n+1}} & \frac{\partial r_D}{\partial f_{n+1}} \\ \frac{\partial r_R}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial r_R}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial r_R}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial r_R}{\partial R_{n+1}} & \frac{\partial r_R}{\partial f_{n+1}} \\ \frac{\partial r_f}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial r_f}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial r_f}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial r_f}{\partial R_{n+1}} & \frac{\partial r_f}{\partial f_{n+1}} \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} \delta\Delta\gamma \\ \delta p_{n+1} \\ \delta D_{n+1} \\ \delta R_{n+1} \\ \delta f_{n+1} \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} r_{\Delta\gamma}(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}; \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}) \\ r_p(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}; \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial}) \\ r_D(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}; \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}, \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial}) \\ r_R(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}) \\ r_f(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}) \end{bmatrix}^k$$

Actualização das variáveis

$$\begin{aligned}\Delta\gamma^{k+1} &= \Delta\gamma^k + \delta\Delta\gamma^{k+1} \\ p_{n+1}^{k+1} &= p_{n+1}^k + \delta p_{n+1}^{k+1} \\ D_{n+1}^{k+1} &= D_{n+1}^k + \delta D_{n+1}^{k+1} \\ R_{n+1}^{k+1} &= R_{n+1}^k + \delta R_{n+1}^{k+1} \\ f_{n+1}^{k+1} &= f_{n+1}^k + \delta f_{n+1}^{k+1}\end{aligned}$$

⁵ Os valores iniciais para as funções de resíduo na primeira iteração do método de *Newton-Raphson* resultaram de vários testes de modo que o número de iterações necessárias para a resolução do sistema fosse o mínimo possível.

5. Cálculo dos Resíduos

$$\begin{bmatrix} r_{\Delta\gamma}(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}; \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}) \\ r_p(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}; \varepsilon_{v_{n+1}}^{e\,trial}) \\ r_D(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}; \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}, \varepsilon_{v_{n+1}}^{e\,trial}) \\ r_R(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}) \\ r_f(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}) \end{bmatrix}^{k+1}$$

6. Avaliar a convergência

$$Conv = \left\| \begin{bmatrix} r_{\Delta\gamma} \\ r_p \\ r_D \\ r_R \\ r_f \end{bmatrix}^{k+1} \right\|$$

Se $Conv \leq Tol$ – Tópico iii) do Quadro 5.2

Se $Conv > Tol$ – Voltar a (3)

No anexo C encontram-se as 25 derivadas necessárias à implementação deste método iterativo.

5.5.3. Matriz tangente consistente

Em domínio elástico, a matriz que estabelece a relação entre as deformações e as tensões é a matriz de elasticidade, \mathbf{D}^e .

Porém, no domínio elasto-plástico, é a matriz tangente consistente que estabelece esta relação, \mathbf{D}^{ep} . Em termos conceptuais, esta matriz consiste na derivada do tensor de tensões relativamente ao tensor das deformações elásticas “trial”.

$$\mathbf{D}^{ep} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{e\,trial}} \quad (5.32)$$

Obter \mathbf{D}^{ep} pela derivação de $\boldsymbol{\sigma}$ relativamente a $\boldsymbol{\varepsilon}^{e\,trial}$ é uma tarefa bastante complicada. Porém, é possível obter este tensor de quarta ordem recorrendo ao modelo linearizado implementado na actualização das variáveis internas.

No algoritmo de actualização de tensões o sistema a resolver foi:

$$\begin{cases} r_{\Delta\gamma}(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}; \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}) = 0 \\ r_p(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}; \varepsilon_{v_{n+1}}^{e\,trial}) = 0 \\ r_D(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}; \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}, \varepsilon_{v_{n+1}}^{e\,trial}) = 0 \\ r_R(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}) = 0 \\ r_f(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}) = 0 \end{cases} \quad (5.33)$$

Diferenciando este sistema obtemos:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial R_{n+1}} & \frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial f_{n+1}} \\ \frac{\partial r_p}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial r_p}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial r_p}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial r_p}{\partial R_{n+1}} & \frac{\partial r_p}{\partial f_{n+1}} \\ \frac{\partial r_D}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial r_D}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial r_D}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial r_D}{\partial R_{n+1}} & \frac{\partial r_D}{\partial f_{n+1}} \\ \frac{\partial r_R}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial r_R}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial r_R}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial r_R}{\partial R_{n+1}} & \frac{\partial r_R}{\partial f_{n+1}} \\ \frac{\partial r_f}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial r_f}{\partial p_{n+1}} & \frac{\partial r_f}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial r_f}{\partial R_{n+1}} & \frac{\partial r_f}{\partial f_{n+1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\Delta\gamma \\ dp_{n+1} \\ dD_{n+1} \\ dR_{n+1} \\ df_{n+1} \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} -\frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} \\ -\frac{\partial r_p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial}} d\boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial} \\ -\frac{\partial r_D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} - \frac{\partial r_D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial}} d\boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.34)
\end{aligned}$$

Invertendo o sistema anterior obtemos a relação tangente entre as 5 variáveis de estado e o tensor das deformações elásticas “trial”.

$$\begin{bmatrix} d\Delta\gamma \\ dp_{n+1} \\ dD_{n+1} \\ dR_{n+1} \\ df_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} \\ -\frac{\partial r_p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial}} d\boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial} \\ -\frac{\partial r_D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} - \frac{\partial r_D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial}} d\boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Diferenciando a equação de actualização do tensor das tensões presente no Quadro 5.2.obtemos

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \frac{2G}{1 + \Delta\gamma 2G} d\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} - \left(\frac{2G}{1 + \Delta\gamma 2G} \right)^2 d\Delta\gamma \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} + dp_{n+1} \mathbf{I} \quad (5.36)$$

$d\Delta\gamma$ e dp_{n+1} podem ser obtidos directamente pelo sistema (5.35) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
d\Delta\gamma = & -M_{11} \frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} - M_{12} \frac{\partial r_p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial}} d\boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial} \\
& - M_{13} \left[\frac{\partial r_D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} + \frac{\partial r_D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial}} d\boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial} \right] \quad (5.37)
\end{aligned}$$

$$dp_{n+1} = -M_{21} \frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} - M_{22} \frac{\partial r_p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial}} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial} - M_{23} \left[\frac{\partial r_D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} + \frac{\partial r_D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial}} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial} \right] \quad (5.38)$$

Tendo em conta as seguintes relações tensoriais (onde \mathbb{I} e \mathbf{I} consistem, respectivamente, num tensor identidade de quarta e segunda ordem)

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial}} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} = \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} \quad (5.39.a)$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial}} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} = \mathbf{I} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} \quad (5.39.b)$$

as equações (5.37) e (5.38) reescrevem-se do seguinte modo

$$d\Delta\gamma = -M_{11} \frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}} : \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - M_{12} \frac{\partial r_p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial}} \mathbf{I} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - M_{13} \left[\frac{\partial r_D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}} : \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} + \frac{\partial r_D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial}} \mathbf{I} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} \right] \quad (5.40)$$

$$dp_{n+1} = -M_{21} \frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}} : \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - M_{22} \frac{\partial r_p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial}} \mathbf{I} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - M_{23} \left[\frac{\partial r_D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}} : \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} + \frac{\partial r_D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial}} \mathbf{I} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} \right] \quad (5.41)$$

Introduzindo as duas relações definidas anteriormente em (5.36) bem como a equação (5.29) relativa ao tensor desviador das tensões, e após alguma manipulação algébrica, obtemos a seguinte relação para a matriz tangente consistente.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{ep} &= \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial}} \\ &= \left[-M_{21} \frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}} : \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) - M_{22} \frac{\partial r_p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial}} \mathbf{I} - M_{23} \left[\frac{\partial r_D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}} : \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) + \frac{\partial r_D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial}} \mathbf{I} \right] \right] \otimes \mathbf{I} \\ &\quad + \frac{2G}{1 + \Delta\gamma 2G} \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) + \left(\frac{2G}{1 + \Delta\gamma 2G} \right)^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} \\ &\quad \otimes \left[M_{11} \frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}} : \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) + M_{12} \frac{\partial r_p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial}} \mathbf{I} + M_{13} \left[\frac{\partial r_D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}} : \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) + \frac{\partial r_D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{e\,trial}} \mathbf{I} \right] \right] \end{aligned} \quad (5.42)$$

Facilmente se constata pela equação anterior que D^{ep} não é simétrica. Esta não simetria deve-se ao produto didáctico, representado pelo símbolo “ \otimes ”, entre dois tensores diferentes presentes na equação (5.42). As derivadas tensoriais necessárias à construção de D^{ep} encontram-se no anexo D.

5.6. Resultados Numéricos

Com a introdução do efeito de corte no modelo original de Gurson, espera-se que este seja capaz de caracterizar a rotura de sólidos de uma forma mais realista. É sobretudo em situações de corte e problemas de estado plano de deformação que se espera obter alguma diferença entre o modelo original de Gurson e o novo modelo proposto.

A análise deste modelo será efectuada com base nos ensaios anteriormente apresentados, mantendo-se o mesmo nível de deslocamento prescrito. No entanto, no caso particular do ensaio de corte, efectuou-se um novo teste com um nível de deslocamento prescrito bastante superior. Para além destes ensaios, para uma análise mais pormenorizada da nova variável de dano, efectuaram-se dois novos testes: um ensaio de corte puro apenas num elemento finito de 4 nós e um ensaio de tracção num provete em estado plano de deformação, que será apresentado na secção 5.6.3.2.

Ao longo desta análise, não será realizada nenhuma comparação com o modelo original de Lemaitre.

5.6.1. Ensaio de corte puro apenas num elemento finito

Este ensaio tem como objectivo apenas analisar a evolução da nova variável de dano num estado de corte puro. Para tal efeito, foi simulado uma vez mais o exemplo apresentado na secção 4.3.4. Neste exemplo, solicitou-se apenas um elemento quadrangular de quatro nós ao corte puro com um dano inicial de 0.001. A Figura 5.3 apresenta a deformada do elemento finito. Verifica-se que a variável de dano é constante ao longo de todo o elemento.

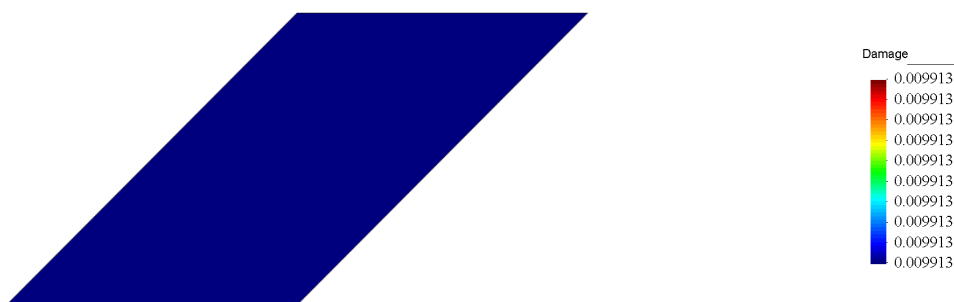


Figura 5.3. Distribuição da variável de dano com efeito de corte num elemento quadrangular de quatro nós solicitado ao corte.

O gráfico da Figura 5.4 apresenta a evolução da nova variável de dano, em função do deslocamento prescrito horizontal. Trata-se de uma evolução contínua, em que à medida que o deslocamento prescrito aumenta, a sua evolução é mais acentuada.

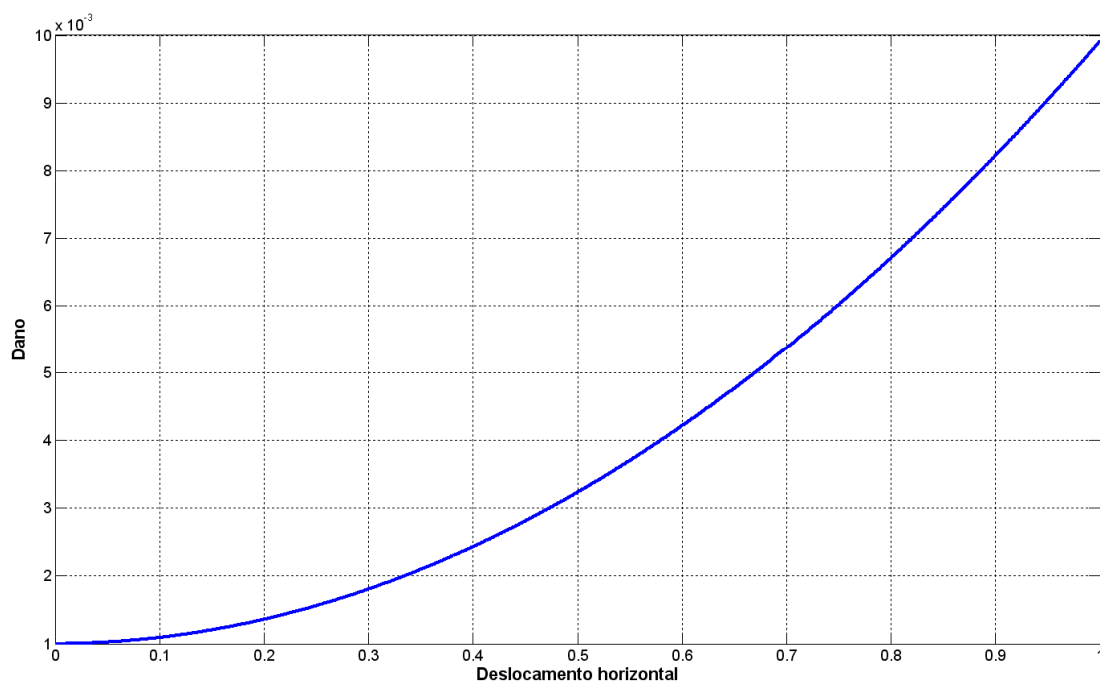


Figura 5.4. Evolução da variável de dano.

5.6.2. Provete de Corte

Uma vez mais, recorreu-se ao provete desenvolvido por Brunig (Brunig, Chyra, Albrecht, Driemeier, & Alves, 2007) para avaliar efectivamente as potencialidades deste novo modelo cuja geometria está descrita na Figura 4.23. Tal como no caso anterior, simulou-se o mesmo ensaio com diferentes porosidades iniciais, 0.001, 0.01 e 0.05. A título de exemplo, apresenta-se na tabela seguinte a convergência global do novo modelo para este ensaio com uma porosidade inicial de 0.01. Nos restantes ensaios com porosidades iniciais diferentes, a convergência é também quadrática. No entanto, no caso particular dos ensaios com $f_0 = 0.05$, quando a variável de dano atinge valores próximos de 0.1, esta deixa de ser perfeitamente quadrática. Note-se que este problema não é exclusivo apenas do novo modelo, verificando-se o mesmo efeito no modelo original de Gurson.

Tabela 5.1 - Convergência do novo modelo no ensaio de corte com uma porosidade inicial de $f_0 = 0.01$.

Iteração	Convergência
1	6.28048
2	0.114042
3	0.471514×10^{-4}
4	0.534785×10^{-9}

A Figura 5.5 apresenta as curvas de reacção do modelo original de Gurson e do modelo modificado. O novo modelo implementado, ao contemplar o efeito de corte, é mais sensível à degradação interna do material, resultando numa menor reacção. Este efeito é bem patente no caso do ensaio com uma porosidade inicial $f_0 = 0.05$, no entanto, constata-se que a diferença entre o novo modelo e o original para este nível de deslocamento não é significativa.

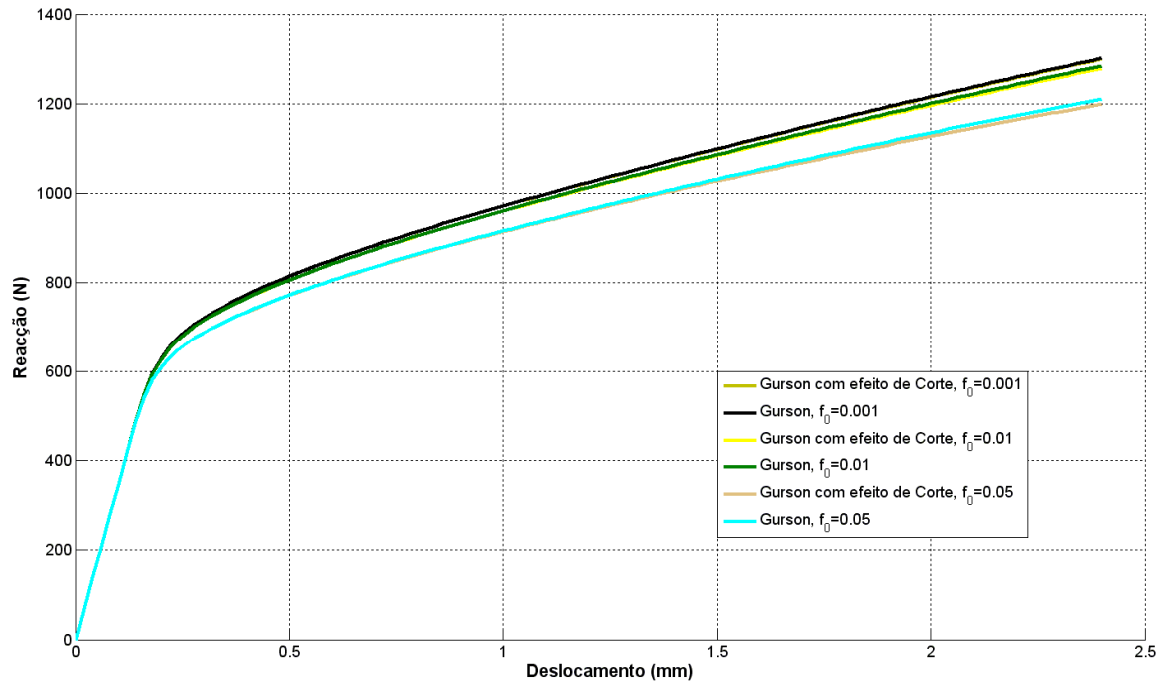


Figura 5.5. Curvas de reacção.

A Figura 5.6 apresenta a distribuição da nova variável de dano para um deslocamento prescrito de 2.4 mm . Como é possível verificar, no caso de $f_0 = 0.001$ e $f_0 = 0.01$ o ponto onde é indicado o dano máximo encontra-se no centro da secção resistente ao corte, estando de acordo com os resultados experimentais. Porém, para uma porosidade inicial de 0.05 este resultado não se verifica. No entanto, comparativamente com o modelo original de Gurson (Fig. 4.25.d) a zona resistente apresenta um nível de dano bastante superior. Na Figura 5.7 é possível verificar a evolução da variável de dano do modelo original de Gurson e do modelo proposto no ponto crítico. Como é possível constatar pela representação, a nova variável de dano apresenta uma maior evolução.

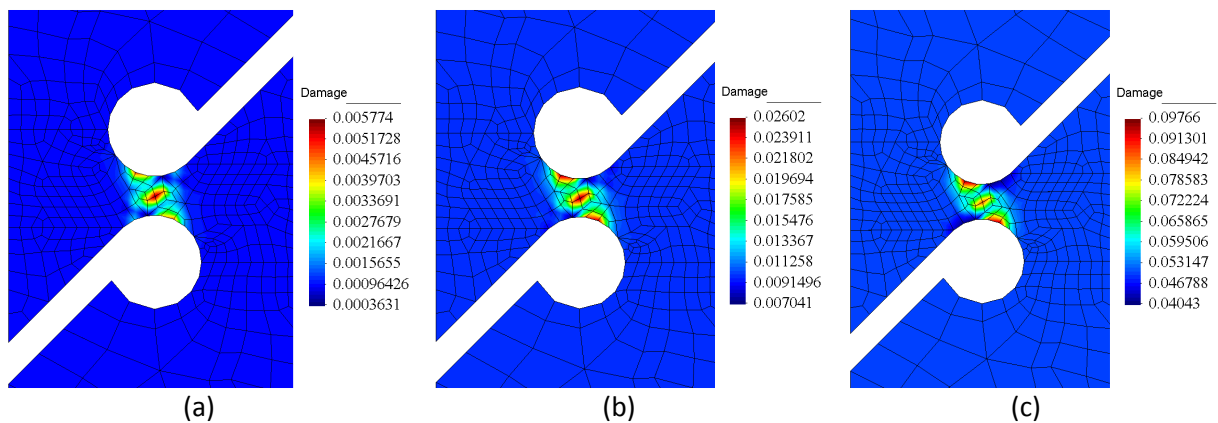


Figura 5.6. Distribuição da variável de dano no provete de corte para um deslocamento prescrito de 2.4 mm . a) Porosidade inicial $f_0 = 0.001$; b) Porosidade inicial $f_0 = 0.01$; c) Porosidade inicial $f_0 = 0.05$.

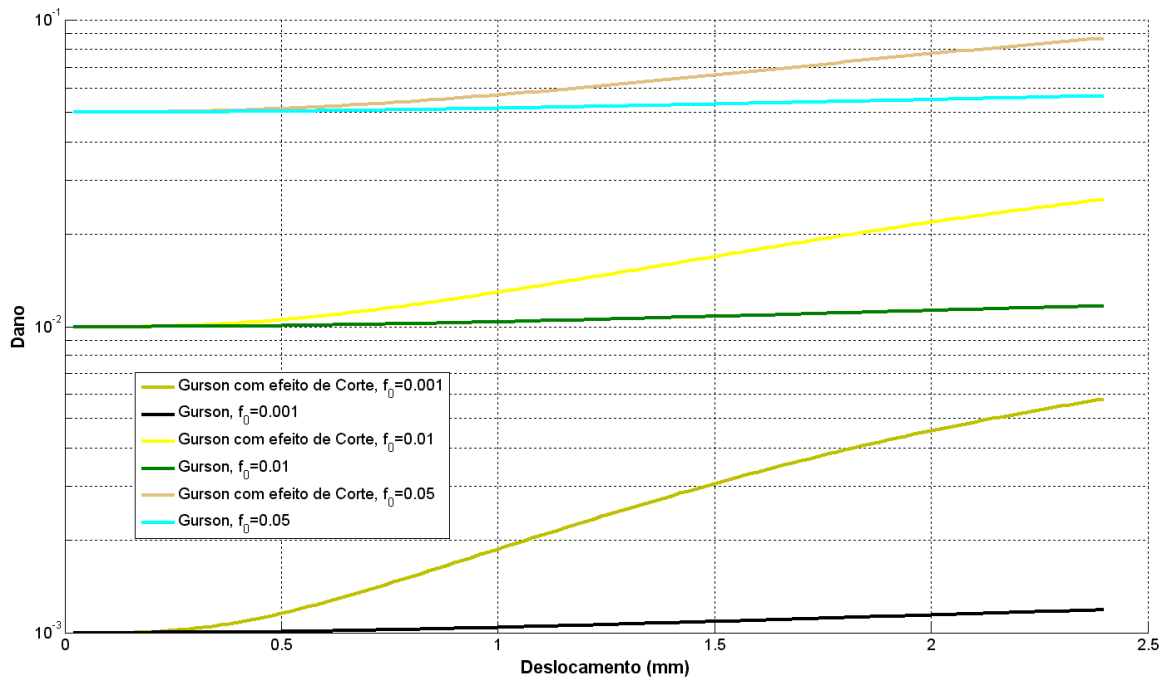


Figura 5.7. Evolução da variável de dano no ponto crítico do provete de corte.

Por último, interessa avaliar a alteração na deformação plástica acumulada na rotura e o respectivo coeficiente de triaxialidade. Em termos de distribuição (Fig. 5.8) e de valores não se verificam grandes alterações. Consta-se também que o respectivo coeficiente de triaxialidade no ponto de rotura não se alterou significativamente. A Tabela 5.2. apresenta estes mesmos valores para os diferentes ensaios.

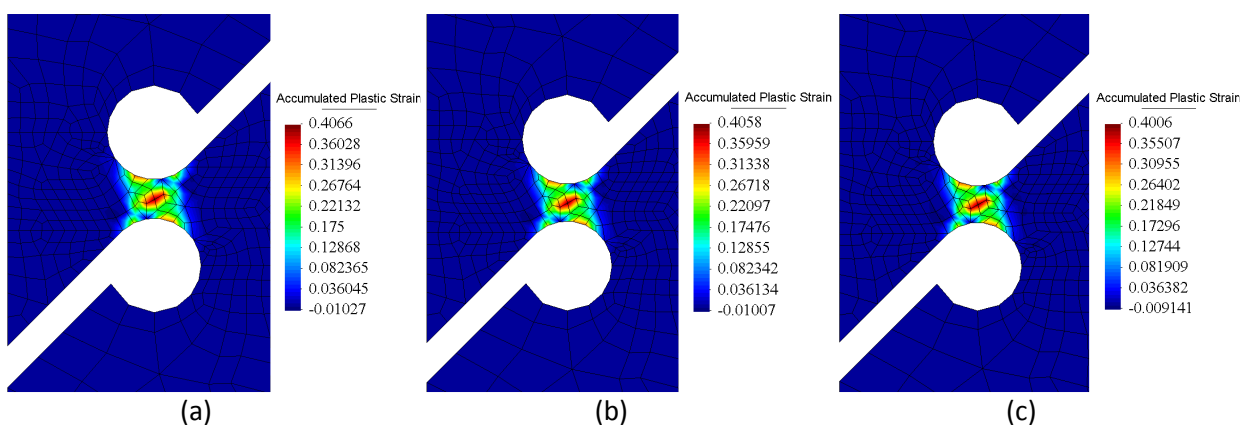


Figura 5.8. Distribuição da deformação plástica acumulada no provete de corte para um deslocamento prescrito de 2.4 mm. a) Porosidade inicial $f_0 = 0.001$; b) Porosidade inicial $f_0 = 0.01$; c) Porosidade inicial $f_0 = 0.05$.

Tabela 5.2. Resultados da deformação plástica acumulada na rotura e respectivos coeficientes de triaxialidade para o modelo original de Gurson e com efeito de corte.

	Coeficiente de triaxialidade, Γ	Deformação plástica acumulada na rotura, $\bar{\epsilon}_{rot}^p$
Gurson, $f_0 = 0.001$	0.2534	0.4058
Gurson com efeito de corte, $f_0 = 0.001$	0.2523	0.4066
Gurson, $f_0 = 0.01$	0.2462	0.4037
Gurson com efeito de corte, $f_0 = 0.01$	0.2436	0.4058
Gurson, $f_0 = 0.05$	0.2265	0.3949
Gurson com efeito de corte, $f_0 = 0.05$	0.2243	0.4006

Os resultados aqui apresentados associados a um deslocamento prescrito de 2.4 mm ficaram um pouco aquém das expectativas. Como é possível verificar pelos dados apresentados, tanto a capacidade de carga do material como o coeficiente de triaxialidade diminuíram, enquanto a deformação plástica acumulada na rotura aumentou. A variação destes três parâmetros com o novo modelo encontra-se de acordo com a inicialmente esperada. Porém, seria de esperar uma variação mais significativa para este nível de deslocamento prescrito. Face a estes dados, pode-se concluir que a introdução de um efeito de corte exclusivamente na variável de dano talvez não seja suficiente para produzir resultados mais significativos.

De forma a explorar um pouco mais os efeitos da nova variável de dano, simulou-se uma vez mais o mesmo ensaio aumentando o valor do deslocamento prescrito. O principal objectivo deste ensaio foi analisar o impacto da evolução da variável de dano, D , na curva de reacção *versus* deslocamento. Na Figura 5.9 apresentam-se as curvas de reacção dos dois modelos em análise, com porosidades iniciais de 0.001 e 0.01. Não é apresentada a curva para uma porosidade inicial de 0.05 uma vez que, com este valor inicial de porosidade e para deslocamentos prescritos significativos, as duas variáveis de ambos os modelos de dano aproximam-se rapidamente do valor de 0.1, resultando numa deterioração significativa da taxa de convergência.

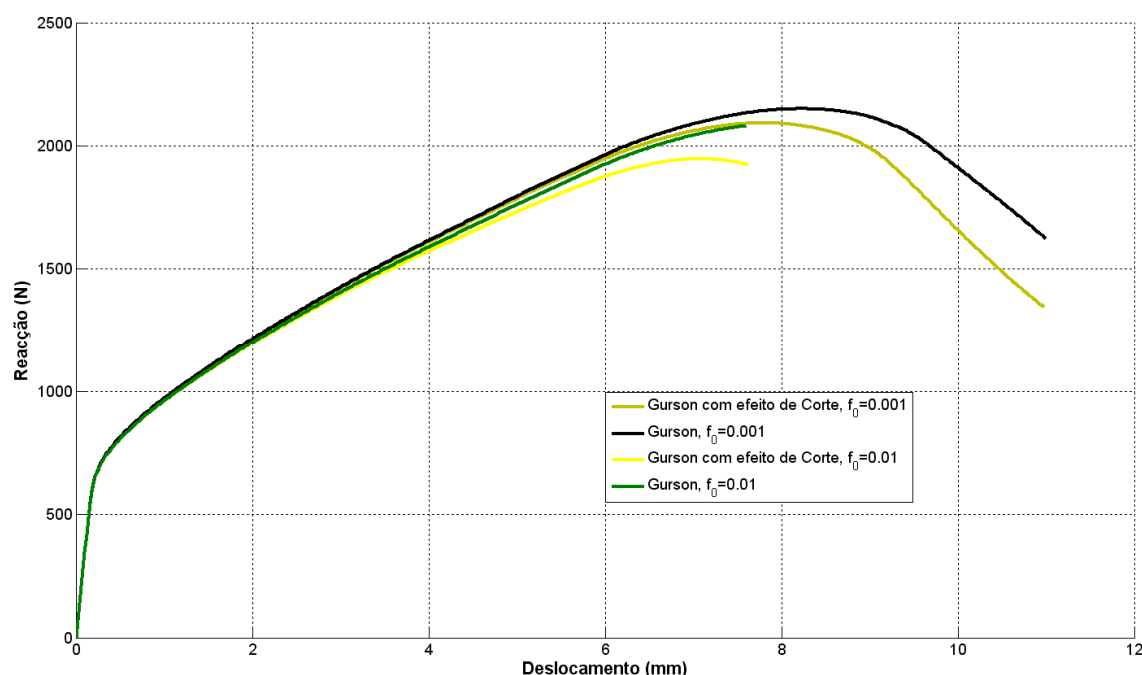


Figura 5.9 - Curva de Reacção do ensaio de corte com elevado deslocamento prescrito.

Como é possível verificar pela figura anterior, as curvas associadas ao novo modelo apresentam amolecimento (“softening”) para um deslocamento prescrito menor que o modelo original de Gurson. Isto é claramente um sinal que o novo modelo possui a capacidade de contabilizar a degradação do material provocada por efeitos de corte. Porém, este efeito (amolecimento) só é detectado para um nível de deslocamento prescrito elevado. Face a estes resultados, e tendo em conta que este trabalho se baseou na análise de dados publicados na literatura e de ensaios numéricos realizados, conclui-se que existe todo o interesse em realizar ensaios experimentais uma vez que só desta forma é possível avaliar os resultados em termos quantitativos.

5.6.3. Ensaios de tracção em estado plano de deformação

De acordo com os dados apresentados na secção 5.3 relativamente ao ângulo de *Lode*, verifica-se que em estado plano de deformação e num estado inicial, $g_\theta = 1$. Face a este dado, esperam-se encontrar diferenças significativas neste tipo de ensaios. Para a análise do efeito de corte neste tipo de problemas, efectuou-se uma vez mais a simulação de um provete com entalhe apresentado na Figura 4.29 para diferentes porosidades iniciais. De forma a consolidar os resultados realizou-se um novo ensaio de um provete em estado plano de deformação, mas sem entalhe. O objectivo deste ensaio é apenas comparar a distribuição da variável de dano entre o modelo original de Gurson e o modelo com efeito de corte.

5.6.3.1. Provette com entalhe - “Flat Grooved”

A Figura 5.10 apresenta a distribuição da variável de dano do novo modelo. Tal como no modelo original, o dano crítico ocorre no centro da secção mínima. No entanto, há duas diferenças substanciais relativamente ao modelo de Gurson original. A primeira é relativa à evolução da variável de dano no ponto onde ocorre a rotura. Como é possível verificar pela Figura 5.11, a nova variável de dano implementada evolui mais para o mesmo nível de deslocamento prescrito. Isto deve-se à contabilização dos efeitos de corte presentes nos planos de deslizamento neste tipo de ensaios.

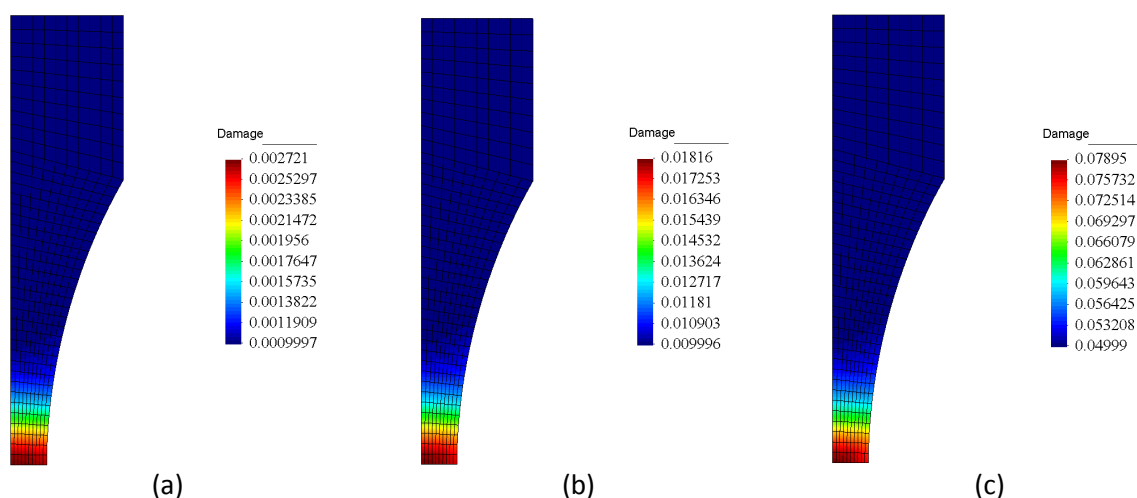


Figura 5.10. Distribuição da variável de dano no provete de tracção com entalhe em estado plano de deformação para um deslocamento prescrito de 0.326 mm . a) Porosidade inicial $f_0 = 0.001$; b) Porosidade inicial $f_0 = 0.01$; c) Porosidade inicial $f_0 = 0.05$.

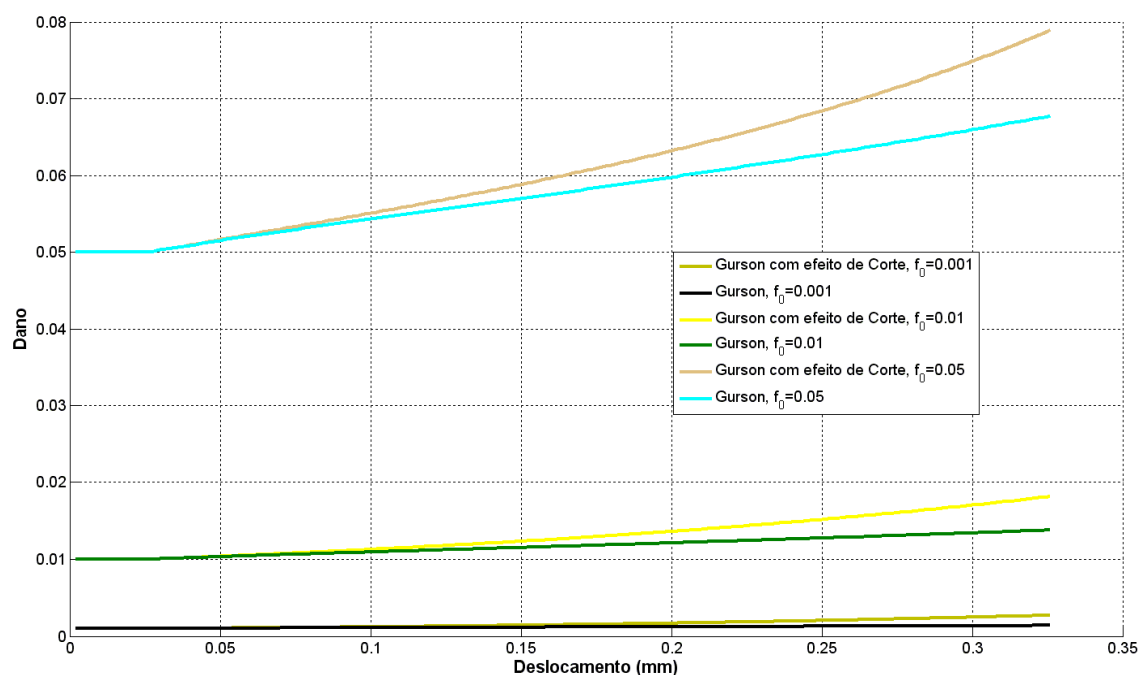


Figura 5.11. Evolução da variável de dano no ponto crítico do provete com entalhe em estado plano de deformação.

A segunda diferença deve-se à distribuição da variável de dano ao longo da secção crítica (do interior para o exterior). No caso do modelo original de Gurson, a variável de dano tem um gradiente mais acentuado que no novo modelo, verificando-se neste uma secção crítica toda ela mais danificada. Este facto é bem visível na Figura 5.12. Apenas se apresenta para o caso de uma porosidade inicial de $f_0 = 0.001$, uma vez que, para os restantes exemplos, se verifica o mesmo efeito.



Figura 5.12. Distribuição da variável de dano para um deslocamento prescrito de 0.326 mm. a) Modelo de Gurson com efeito de corte, $f_0 = 0.001$; b) Modelo original de Gurson, $f_0 = 0.001$.

Face ao maior nível de dano presente no novo modelo, verifica-se que a capacidade de carga do material é menor (Fig. 5.12). No entanto, tal como no exemplo apresentado anteriormente, para o nível de deslocamento utilizado, não se verifica uma grande diferença nas curvas de reacção, sendo necessário utilizar um nível de deslocamento prescrito bastante superior para se observar diferenças significativas.

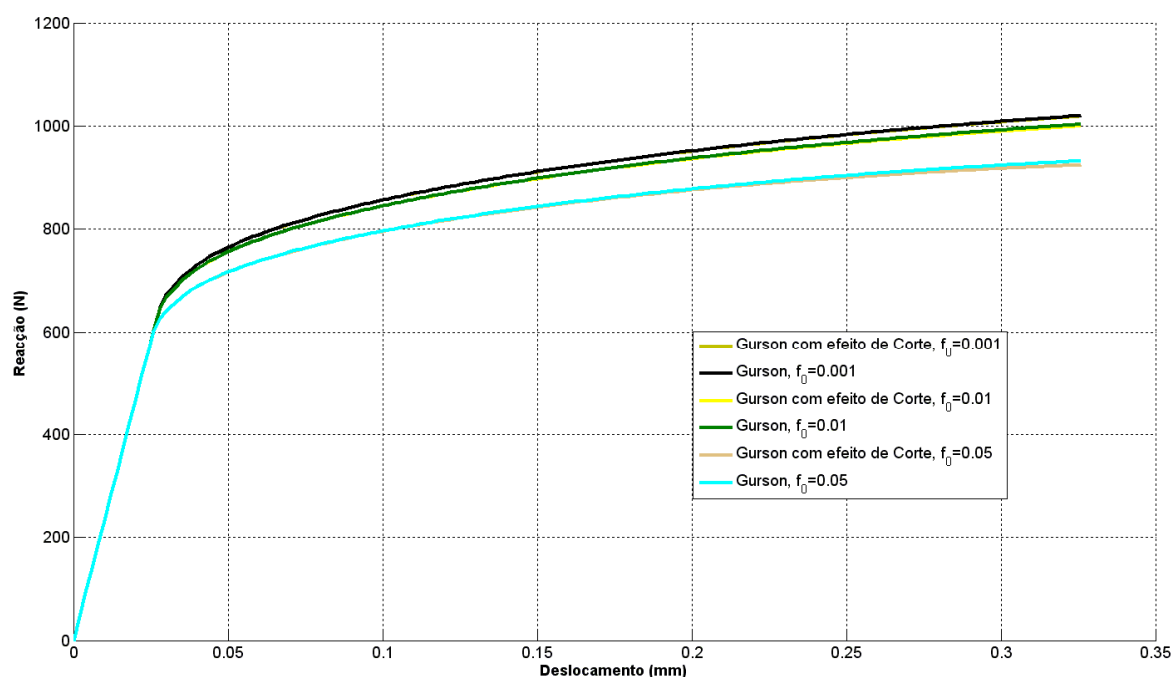


Figura 5.13. Curvas de reacção do provete de tracção com entalhe em estado plano de deformação.

Analisando as restantes variáveis internas, nomeadamente a deformação plástica acumulada na rotura e o respectivo coeficiente de triaxialidade, não se verificam diferenças significativas, porém, note-se que o modelo original de Gurson já apresentava bons resultados neste exemplo.

5.6.3.2. Provete de tracção em estado plano de deformação sem entalhe

Este ensaio tem como objectivo exclusivo a análise da distribuição da variável de dano. Em problemas em estado plano de deformação, existem planos preferenciais onde ocorre o deslizamento. É nestes planos onde o efeito de corte é máximo, encontrando-se normalmente inclinado 45° relativamente à direcção de carregamento. Uma vez que foi introduzido um efeito de corte no modelo de Gurson, é de todo o interesse, analisar a capacidade do novo modelo na

identificação deste efeito. O provete utilizado encontra-se descrito na Figura 5.14. O elemento finito utilizado é quadrangular de 8 nós com integração reduzida.

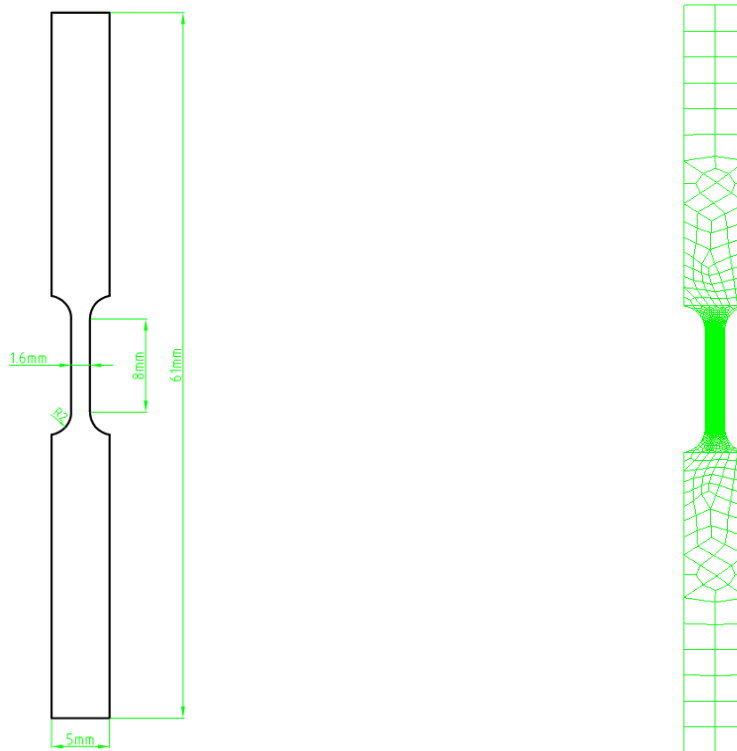


Figura 5.14. Novo provete de tracção em estado plano de deformação. a) Geometria do provete; b) Malha de elementos finitos com 3714 elementos (Teng, 2008).

Apenas se apresenta os resultados das simulações para o modelo original de Gurson e para o modelo proposto com uma porosidade inicial de $f_0 = 0.001$, na medida em que a distribuição da respectiva variável de dano é similar para diferentes porosidades iniciais. Como é possível verificar pela figura seguinte, o novo modelo tem a capacidade de “detectar” os planos de deslizamento máximo. Embora estes planos de deslizamento presentes na Figura 5.15 a) não se encontrem extremamente vincados, comparando com o resultado proveniente do modelo original de Gurson (Fig. 5.15 b)), constata-se que se trata de uma significativa evolução. Analisando a figura seguinte verifica-se também que a variável de dano no modelo proposto concentra-se no ponto central da secção crítica, sendo neste mesmo ponto onde experimentalmente se verifica a ruptura. Isto permite-nos concluir, que com a introdução de um efeito de corte na variável de dano, os resultados obtidos são mais realistas. Um outro aspecto a salientar da Figura 5.15.a), é a maior estricção presente na secção crítica no novo modelo associado a um elevado nível de dano presente na secção resistente.

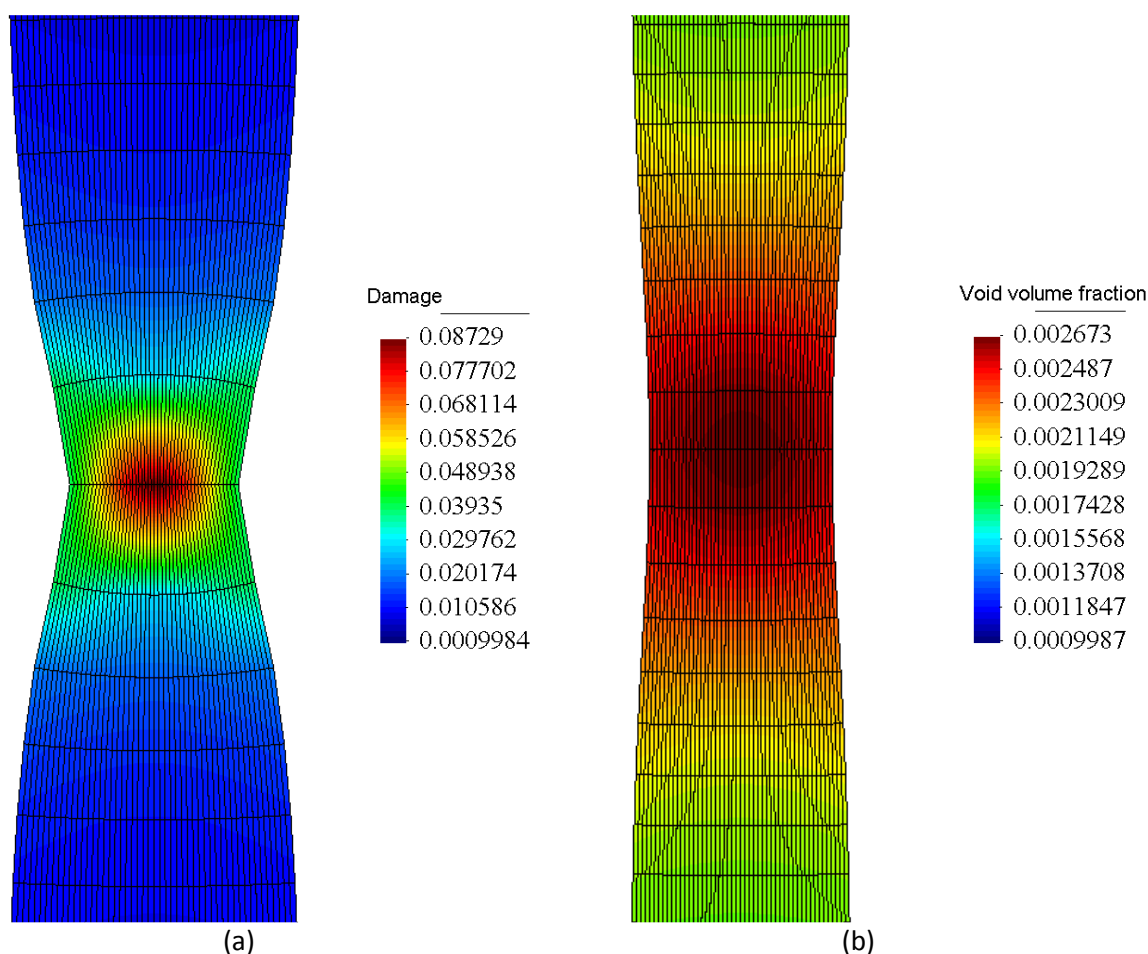


Figura 5.15. Distribuição da variável de dano para um deslocamento prescrito de 4.2011 mm. a) Modelo de Gurson com efeito de Corte; b) Modelo original de Gurson.

5.6.4. Ensaios de tracção em provetes cilíndricos

Após a simulação dos vários provetes cilíndricos de tracção com o novo modelo, verifica-se que a componente de corte da variável de dano praticamente não evolui, obtendo-se os mesmos resultados do modelo original de Gurson. Isto significa, que ao longo do carregamento, a componente desviadora do tensor das tensões não se alterou. Porém, não foi com intuito de otimizar os resultados deste tipo de ensaios que se desenvolveu a nova variável de dano.

5.6.5. Ensaios de compressão em provetes cilíndricos com entalhe

Na secção 4.3.3.2 deste documento foi referida a incapacidade do modelo original de Gurson em descrever coerentemente um ensaio de compressão, quer em termos quantitativos – valores das variáveis internas, tais como deformação plástica acumulada e coeficiente de triaxialidade – quer em termos qualitativos – indicação errada do ponto crítico.

Embora numa fase inicial deste ensaio $g_\theta = 0$, espera-se que à medida que o provete se deforme junto ao entalhe a função g_θ seja capaz de contabilizar os efeitos de corte presentes. Foi realizado apenas um ensaio com o provete cilíndrico com entalhe de raio $R = 4.5 \text{ mm}$, com uma porosidade inicial de 0.001. O motivo da simulação de um único provete e com uma porosidade inicial muito baixa deve-se a dois factores: é neste provete, com o entalhe mais severo onde efeitos de corte são mais acentuados; e ao considerar uma porosidade inicial muito baixa, o efeito do fecho dos poros é ignorado, sendo a variável de dano dependente sobretudo do efeito de corte.

A figura seguinte apresenta a distribuição da variável de dano. Em termos qualitativos, o resultado encontra-se correcto, isto porque o ponto de rotura indicado coincide com o homólogo proveniente de resultados experimentais. Porém, quantitativamente os resultados não se encontram correctos. No ponto crítico $\bar{\epsilon}_{rot}^p = 0.3995$ e $\Gamma = -0.484$. Uma vez mais, e ao longo de todos os ensaios realizados de compressão, o valor “cut-off” do coeficiente de triaxialidade não foi respeitado.

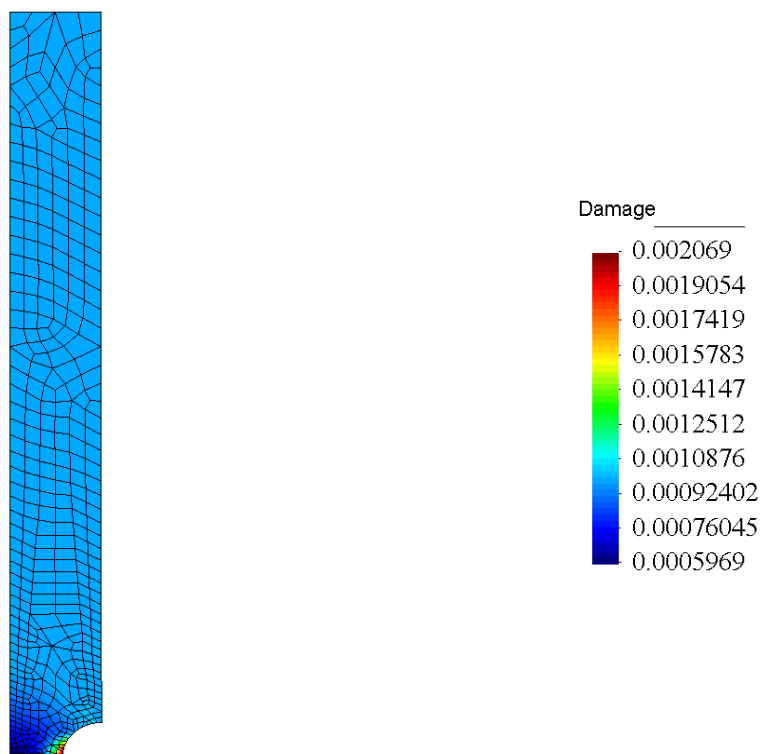


Figura 5.16. - Distribuição da variável de dano no provete cilíndrico com entalhe $R = 4.5 \text{ mm}$ à compressão.

5.7. Conclusões

O modelo original de Gurson apresenta algumas debilidades na caracterização de efeitos de corte. Isto foi bastante perceptível na secção 4.3.3.3 deste documento. Com a introdução neste modelo de um efeito de corte adicionado à variável de dano original, f , os resultados foram otimizados. No caso do provete de corte, a variável é máxima no ponto onde se verifica experimentalmente a rotura. Verificou-se também, no ensaio de compressão apresentado na secção 5.6.5, que o novo modelo é capaz de detectar os efeitos de corte presentes junto à secção do entalhe.

Face aos dados apresentados não é possível concluir com veemência quanto à validade dos resultados em termos quantitativos. Em termos de evolução das variáveis em análise nos exemplos de corte e de tracção em estado plano de deformação, conclui-se que esta se encontra de acordo com o esperado, ou seja, a capacidade de carga do material (reação) e o coeficiente de triaxialidade diminuíram e, por sua vez, a deformação plástica acumulada na rotura aumentou. Para validar ou refutar este novo modelo apresentado seria de todo o interesse, num trabalho futuro, a realização de ensaios experimentais com os provetes de corte e de tracção em estado plano de deformação permitindo, desta forma, calibrar a nova variável de dano. Caso os resultados experimentais não sejam similares com os numéricos provenientes do novo modelo, conclui-se que apenas a introdução de uma componente de corte na variável de dano não é suficiente para tornar o modelo original de Gurson mais realista.

No que diz respeito aos valores obtidos no ensaio de compressão, uma vez mais se verifica que o valor “*cut-off*” do coeficiente de triaxialidade não é estabelecido, continuando este ensaio a ser um desafio para o engenheiro.

Conclusões e Perspectivas Futuras

6.1. Síntese da dissertação

O presente documento teve como principal objectivo apresentar os principais processos para o desenvolvimento de modelos constitutivos capazes de descrever a degradação interna e prever o local da rotura de um material, com recurso ao Método de Elementos Finitos (**MEF**). Para a realização deste trabalho foram cumpridas as seguintes etapas:

- Análise de modelos constitutivos que avaliam a degradação interna de um material, de forma a obter as suas virtudes e defeitos;
- Comparação de resultados em problemas muito simples obtidos via numérica (modelo original de Lemaitre) e via analítica;
- Construção da curva $\bar{\epsilon}_{rot}^p(\Gamma)$ para os modelos originais de Lemaitre e Gurson;
- Tendo por base o modelo original de Gurson, introdução de um efeito de corte na sua variável de dano e posterior análise dos respectivos resultados.

6.2. Conclusões Gerais

Desprezar o efeito da degradação interna de um material quando este é submetido a deformações consideráveis é uma hipótese irrealista. Efeitos de nucleação, crescimento e coalescência são fenómenos a considerar. Porém, numa análise mais cuidada, a distorção de microcavidades consiste também num mecanismo de degradação interna de um material, apresentando um importante papel em estados de corte e compressão.

Ao longo deste documento, foram analisados dois modelos que permitem avaliar a degradação interna de um material - os modelos originais de Lemaitre e Gurson. No caso particular do modelo de Lemaitre, foi possível comparar para problemas relativamente simples (pressurização interna de um cilindro e flexão de uma viga) os resultados provenientes deste modelo com a respectiva solução analítica. No caso do problema relativo à pressurização interna de um cilindro, não foi possível concluir quanto à qualidade dos resultados devido à forte dependência da malha. Porém, no caso do segundo problema – flexão de uma viga – foi possível verificar que os resultados numéricos e analíticos apresentam valores similares.

Simulando diferentes ensaios, utilizando os modelos de Gurson e Lemaitre, foi possível constatar as dificuldades que ambos possuem na caracterização da fractura no caso de ensaios de corte e compressão. Ambos apresentam evoluções da deformação plástica acumulada na rotura, $\bar{\epsilon}_{rot}^p$ em

função do coeficiente de triaxialidade, Γ completamente distintas dos resultados publicados por Wierzbicki nas gamas de triaxialidade onde efeitos de corte são responsáveis pela rotura. Porém, para gamas de triaxialidade altas relativas a solicitações de tracção, os dois modelos apresentam evoluções similares com os resultados experimentais. No entanto, nesta gama o modelo de Gurson apresenta melhores resultados na medida em que é capaz de distinguir correctamente um ensaio axissimétrico de um ensaio em estado plano de deformação.

Face a estes resultados, foi introduzido no modelo original de Gurson um efeito de corte, resultando assim um novo modelo dependente do terceiro invariante do tensor desviador das tensões. Para a implementação do novo modelo, foi necessário construir um algoritmo para a actualização das tensões e variáveis internas, bem como um algoritmo para o cálculo da matriz tangente consistente.

Os resultados do novo modelo são melhores qualitativamente. Ao contrário do modelo original de Gurson, a variável de dano do novo modelo em corte puro não se apresenta estagnada. Para além disto, nos ensaios de corte e compressão analisados, o novo modelo é capaz de indicar correctamente o ponto de rotura.

Porém, quantitativamente, os resultados encontram-se por validar cabalmente. Como seria de esperar, nos exemplos de corte e tracção em estado plano de deformação, a reacção e o coeficiente de triaxialidade diminuíram, devido à contabilização do efeito de corte. No caso particular do coeficiente de triaxialidade, a sua diminuição deve-se ao aumento da tensão equivalente de von Mises, que não é mais do que uma medida do estado desviador de tensão. Relativamente à deformação plástica acumulada, esta aumentou como consequência de um maior nível de dano. Porém, em termos quantitativos a alteração destes três parâmetros é algo a analisar e validar em trabalho futuros. De forma analisar os resultados em termos quantitativos, seria de todo o interesse realizar alguns ensaios experimentais e comparar com os resultados numéricos provenientes do novo modelo.

No que diz respeito ao ensaio de compressão, e tal como em todos os restantes ensaios de compressão o valor de “*cut-off*” do coeficiente de triaxialidade não foi estabelecido, sendo este tipo de carregamento ainda um problema a resolver pela comunidade científica.

Em termos pessoais, este trabalho permitiu-me entrar numa área complexa e com um enorme potencial científico em termos futuros, levando-me a pensar que foram atingidos os principais objectivos para este tipo de trabalho.

6.3. Perspectivas Futuras

De acordo com as conclusões retiradas ao longo desta dissertação, importa indicar alguns caminhos a percorrer para um estudo ainda mais aprofundado nesta temática:

- Numa primeira fase, seria interessante converter o modelo apresentado de forma a permitir rodar exemplos em três dimensões. Com um modelo tridimensional seria possível simular o provete proposto por Wierzbicki e a sua equipa, denominado “*Borboleta*”, obtendo-se um maior número de pontos na gama de triaxialidades associada a efeitos de corte.
- Introduzir no novo modelo os efeitos de nucleação, crescimento e coalescência. Com esta implementação, não seria necessário introduzir a fracção volúmica inicial, reduzindo o número de ensaios a testar numericamente. Relativamente ao efeito de coalescência, seria

interessante analisar diferentes modelos que descrevam este fenómeno e, se possível, introduzir alguma componente de corte.

- Mantendo o mesmo formalismo de corte apresentado na secção 5.2, introduzir alterações na própria função de cedência para que seja directamente dependente de uma componente de corte.
- Realizar ensaios experimentais e compará-los directamente com o modelo sugerido. Desta forma, seria possível analisar de uma forma mais cuidada a qualidade dos resultados do novo modelo, bem como permitiria calibrar a nova variável de dano para diferentes modos de rotura.

Anexo A

Método de *Newton-Raphson*

O Método de *Newton-Raphson* é um dos métodos numéricos mais utilizados para a resolução de sistemas de equações não lineares. A grande vantagem deste método comparativamente com outros, é o facto de apresentar convergência quadrática quando nos aproximamos da solução final, minimizando o número de iterações necessárias ao cálculo.

Seja $\vec{f}(\vec{x}) = 0$ um sistema com n de equações não lineares, e \vec{x} o vector incógnita do sistema. No início do método, tem-se como ponto de partida um vector “tentativa” \vec{x}_i

$$\vec{x}_i = \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \vdots \\ x_n^i \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Neste método as funções iniciais são aproximadas por funções lineares. Esta aproximação é realizada com recurso à série de Taylor, em torno de \vec{x}_i e considerando apenas os dois primeiros termos da expansão:

$$\vec{f}(\vec{x}) \approx \vec{f}(\vec{x}_i) + \mathbf{A}(\vec{x} - \vec{x}_i) \quad (\text{A.2})$$

\mathbf{A} na equação anterior consiste na matriz com as derivadas de $\vec{f}(\vec{x})$. A equação anterior pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1^i, \dots, x_n^i) \\ f_2(x_1^i, \dots, x_n^i) \\ \vdots \\ f_n(x_1^i, \dots, x_n^i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \dots & \partial f_1/\partial x_n \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 & \dots & \partial f_2/\partial x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_n/\partial x_1 & \partial f_n/\partial x_2 & \dots & \partial f_n/\partial x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^i \\ x_2 - x_2^i \\ \vdots \\ x_n - x_n^i \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Uma vez que o objectivo do método é garantir que $\vec{f}(\vec{x}) = 0$ a equação (A.3) escreve-se da seguinte forma

$$\vec{f}(\vec{x}_i) + \mathbf{A}(\vec{x} - \vec{x}_i) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Manipulando algebricamente a equação anterior obtém-se a equação geral deste método.

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i - [\mathbf{A}]^{-1} \vec{f}(\vec{x}_i) \quad (\text{A.5})$$

Anexo B

Método *Backward* de Euler

O objectivo do método aqui apresentado é a resolução de equações diferenciais de primeira ordem. Conhecida a função $f(x, y)$ sendo esta definida por

$$f(x, y) = \frac{dy(x)}{dx} \equiv y' \quad (\text{B.1})$$

e uma condição inicial, $y(x_0) = y_0$ pretende-se determinar $y(x)$.

A função $y(x)$ pode ser aproximada por uma série de Taylor

$$y_i \equiv y(x_{i+1} - \Delta x) = y_{i+1} - \frac{\Delta x dy(x)}{dx} \Big|_{x=x_{i+1}} + \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2 d^2 y(x)}{dx^2} \Big|_{x=x_{i+1}} + \dots \quad (\text{B.2})$$

Truncando a aproximação anterior e tendo em conta b.1 pode-se escrever

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x f(x_{i+1}, y_{i+1}) \quad (\text{B.3})$$

Este método é de primeira ordem, verificando que quanto menor é o incremento Δx , menor é o erro associado. Relativamente a outros métodos, este método é interessante pela sua estabilidade numérica, no entanto, tem o inconveniente de ser necessário resolver a equação não linear (b.3), sendo necessário para isso utilizar um método numérico tal como o método de *Newton-Raphson* descrito no anexo A.

Anexo C

Derivadas necessárias no método de *Newton-Raphson*

Neste anexo, apresentam-se as derivadas necessárias ao método de *Newton-Raphson* para a resolução do sistema de equações não-lineares intrínsecas ao modelo de Gurson proposto com corte.

Primeira equação de resíduo

$$r_{\Delta\gamma}(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}; \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}) = \left(\frac{2G}{1+2G\Delta\gamma}\right)^2 J_2(\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}) - \frac{1}{3} \left\{ 1 + D_{n+1}^2 - 2D_{n+1} \cosh \left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right] \right\} [\sigma_y(R_{n+1})]^2 = 0 \quad (C.1)$$

Derivadas da primeira função de resíduo

$$\frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} = -\frac{16G^3}{(2G\Delta\gamma + 1)^3} J_2(\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}) \quad (C.2)$$

$$\frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial p_{n+1}} = D_{n+1} \sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right) [\sigma_y(R_{n+1})] \quad (C.3)$$

$$\frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} = -\frac{1}{3} \left\{ 2D_{n+1} - 2 \cosh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right) \right\} [\sigma_y(R_{n+1})]^2 \quad (C.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial R_{n+1}} = & -\frac{2}{3} \left\{ 1 + D_{n+1}^2 - 2D_{n+1} \cosh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right) \right\} [\sigma_y(R_{n+1})] H \\ & - D_{n+1} p_{n+1} \sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right) H \end{aligned} \quad (C.5)$$

$$\frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial f_{n+1}} = 0 \quad (C.6)$$

Segunda equação de resíduo

$$\begin{aligned}
r_p(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}; \varepsilon_{v_{n+1}}^{e\ trial}) \\
= p_{n+1} - K\varepsilon_{v_{n+1}}^{e\ trial} + \Delta\gamma D_{n+1} K\sigma_y(R_{n+1}) \sinh\left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right] = 0
\end{aligned} \quad (C.7)$$

Derivadas da segunda função de resíduo

$$\frac{\partial r_p}{\partial \Delta\gamma} = D_{n+1} K\sigma_y(R_{n+1}) \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right) \quad (C.8)$$

$$\frac{\partial r_p}{\partial p_{n+1}} = 1 + \frac{3}{2} \Delta\gamma D_{n+1} K \cosh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right) \quad (C.9)$$

$$\frac{\partial r_p}{\partial D_{n+1}} = \Delta\gamma K\sigma_y(R_{n+1}) \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right) \quad (C.10)$$

$$\frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial R_{n+1}} = \Delta\gamma D_{n+1} K H \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right) - \frac{3}{2} \frac{\Delta\gamma D_{n+1} K H p_{n+1} \cosh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right)}{\sigma_y(R_{n+1})} \quad (C.11)$$

$$\frac{\partial r_p}{\partial f_{n+1}} = 0 \quad (C.12)$$

Terceira equação de resíduo

$$\begin{aligned}
r_D(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}; \varepsilon_{d_{n+1}}^{e\ trial}, \varepsilon_{v_{n+1}}^{e\ trial}) \\
= D_{n+1} - D_n - \Delta\gamma \sinh\left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right] (f_{n+1} - f_{n+1}^2) \sigma_y(R_{n+1}) \\
- \frac{3}{\sqrt{\pi}} f_{n+1}^{0.5} \varepsilon_{eq\ n+1} \Delta\varepsilon_{eq\ n+1} g_{\bar{\theta}_{n+1}} = 0
\end{aligned} \quad (C.13)$$

Nesta função de resíduo importa apresentar a manipulação matemática efectuada. A equação (C.13) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
r_D(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}; \varepsilon_{d_{n+1}}^{e\ trial}, \varepsilon_{v_{n+1}}^{e\ trial}) \\
= D_{n+1} - D_n - \Delta\gamma \sinh\left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right] (f_{n+1} - f_{n+1}^2) \sigma_y(R_{n+1}) \\
- \frac{3}{\sqrt{\pi}} f_{n+1}^{0.5} \varepsilon_{eq\ n+1} \Delta\varepsilon_{eq\ n+1} \left[1 - \left|1 - \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{27 \det(\mathbf{s}_{n+1})}{2 \sigma_{eq\ n+1}^3}\right)\right|\right] = 0
\end{aligned} \quad (C.14)$$

Introduzindo na equação anterior a definição da tensão equivalente de von Mises e a definição do tensor desviador das tensões, \mathbf{s} (equação (5.29)) resulta:

$$\begin{aligned}
r_D(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}; \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}, \varepsilon_{v_{n+1}}^{e\,trial}) \\
= D_{n+1} - D_n - \Delta\gamma \sinh \left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right] (f_{n+1} - f_{n+1}^2) \sigma_y(R_{n+1}) \\
- \frac{3}{\sqrt{\pi}} f_{n+1}^{0.5} \varepsilon_{eq_{n+1}} \Delta \varepsilon_{eq_{n+1}} \left[1 \right. \\
\left. - \left| 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \left(\frac{27}{2} \frac{\det \left(\frac{2G}{1 + \Delta\gamma 2G} \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} \right)}{\left(\frac{2G}{1 + \Delta\gamma 2G} \right)^3 \left(\frac{3}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} : \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} \right)^{3/2}} \right) \right| \right] = 0
\end{aligned} \tag{C.15}$$

Uma vez que $\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}$ consiste num tensor de segunda ordem cuja dimensão 3×3

$$\det \left(\frac{2G}{1 + \Delta\gamma 2G} \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} \right) = \left(\frac{2G}{1 + \Delta\gamma 2G} \right)^3 \det(\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}) \tag{C.16}$$

Introduzindo a equação (C.16) em (C.15) resulta

$$\begin{aligned}
r_D(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}; \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}, \varepsilon_{v_{n+1}}^{e\,trial}) \\
= D_{n+1} - D_n - \Delta\gamma \sinh \left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right] (f_{n+1} - f_{n+1}^2) \sigma_y(R_{n+1}) \\
- \frac{3}{\sqrt{\pi}} f_{n+1}^{0.5} \varepsilon_{eq_{n+1}} \Delta \varepsilon_{eq_{n+1}} \left[1 \right. \\
\left. - \left| 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \left(\frac{27}{2} \frac{\det(\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial})}{\left(\frac{2G}{1 + \Delta\gamma 2G} \right)^3 \left(\frac{3}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} : \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} \right)^{3/2}} \right) \right| \right] = 0
\end{aligned} \tag{C.17}$$

Derivadas da terceira função de resíduo

$$\frac{\partial r_D}{\partial \Delta\gamma} = -\sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right) (f_{n+1} - f_{n+1}^2) \sigma_y(R_{n+1}) \tag{C.18}$$

$$\frac{\partial r_D}{\partial p_{n+1}} = -\frac{3}{2} \Delta\gamma \cosh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right) (f_{n+1} - f_{n+1}^2) \tag{C.19}$$

$$\frac{\partial r_D}{\partial D_{n+1}} = 1 \tag{C.20}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_D}{\partial R_{n+1}} = \frac{3}{2} \Delta\gamma \frac{p_{n+1}}{\sigma_y(R_{n+1})} \cosh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right) H(f_{n+1} - f_{n+1}^2) \\
- \Delta\gamma \sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right) H(f_{n+1} - f_{n+1}^2)
\end{aligned} \tag{C.21}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_D}{\partial f_{n+1}} = & -\Delta\gamma \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right) (1 - 2f_{n+1})\sigma_y(R_{n+1}) \\ & - \frac{3}{\sqrt{\pi}} q_2 f_{n+1}^{(-0.5)} \varepsilon_{eq_{n+1}} \Delta\varepsilon_{eq_{n+1}} g_{\bar{\theta}_{n+1}} \end{aligned} \quad (C.22)$$

Quarta equação de resíduo

$$\begin{aligned} r_R(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}) \\ = R_{n+1} - R_n \\ - \frac{\Delta\gamma}{1 - D_{n+1}} \left[\frac{2}{3} \left\{ 1 + D_{n+1}^2 - 2D_{n+1} \cosh\left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right] \right\} [\sigma_y(R_{n+1})] \right. \\ \left. + p_{n+1} D_{n+1} \sinh\left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right] \right] = 0 \end{aligned} \quad (C.23)$$

Derivadas da quarta equação de resíduo

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_R}{\partial \Delta\gamma} = & -\frac{1}{1 - D_{n+1}^*} \left[\frac{2}{3} \left\{ 1 + D_{n+1}^2 - 2D_{n+1} \cosh\left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right] \right\} [\sigma_y(R_{n+1})] \right. \\ & \left. + p_{n+1} 2D_{n+1} \sinh\left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right] \right] \end{aligned} \quad (C.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_R}{\partial p_{n+1}} = & -\frac{\Delta\gamma}{1 - D_{n+1}} \left[-2D_{n+1} \sinh\left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right] + D_{n+1} \sinh\left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right] \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} \frac{D_{n+1} p_{n+1} \cosh\left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right]}{\sigma_y(R_{n+1})} \right] \end{aligned} \quad (C.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_R}{\partial D_{n+1}} = & -\left(\frac{\Delta\gamma}{(D_{n+1} - 1)^2}\right) \left[\frac{2}{3} \left\{ 1 + D_{n+1}^2 - 2D_{n+1} \cosh\left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right] \right\} [\sigma_y(R_{n+1})] \right. \\ & \left. + p_{n+1} D_{n+1} \sinh\left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right] \right] \\ & - \frac{\Delta\gamma}{1 - D_{n+1}} \left[\frac{2}{3} \sigma_y(R_{n+1}) \left\{ 2D_{n+1} - 2 \cosh\left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right] \right\} \right. \\ & \left. + p_{n+1} \sinh\left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right] \right] \end{aligned} \quad (C.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_R}{\partial R_{n+1}} = & 1 - \frac{\Delta\gamma}{1 - D_{n+1}} \left[\frac{2}{3} H \left\{ 1 + D_{n+1}^2 - 2D_{n+1} \cosh\left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right] \right\} \right. \\ & \left. + \frac{2D_{n+1} p_{n+1}}{\sigma_y(R_{n+1})} \sinh\left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right] H - \frac{\frac{3}{2} p_{n+1}^2 D_{n+1} \cosh\left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right] H}{\sigma_y(R_{n+1})} \right] \end{aligned} \quad (C.27)$$

$$\frac{\partial r_R}{\partial f_{n+1}} = 0 \quad (C.28)$$

Quinta equação de resíduo

$$r_f(\Delta\gamma, p_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}) = f_{n+1} - f_n - \Delta\gamma \sinh\left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right] (f_{n+1} - f_{n+1}^2)\sigma_y(R_{n+1}) = 0 \quad (C.29)$$

Derivadas da quinta equação de resíduo

$$\frac{\partial r_f}{\partial \Delta\gamma} = -\sinh\left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right] (f_{n+1} - f_{n+1}^2)\sigma_y(R_{n+1}) \quad (C.30)$$

$$\frac{\partial r_f}{\partial p_{n+1}} = -\frac{3}{2}\Delta\gamma (f_{n+1} - f_{n+1}^2) \cosh\left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right] \quad (C.31)$$

$$\frac{\partial r_f}{\partial D_{n+1}} = 0 \quad (C.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_f}{\partial R_{n+1}} = & -\Delta\gamma \sinh\left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right] (f_{n+1} - f_{n+1}^2)H \\ & + \frac{3}{2}\Delta\gamma \frac{p_{n+1}H(f_{n+1} - f_{n+1}^2) \cosh\left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right]}{\sigma_y(R_{n+1})} \end{aligned} \quad (C.33)$$

$$\frac{\partial r_f}{\partial f_{n+1}} = 1 - \Delta\gamma \sinh\left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})}\right] (1 - 2f_{n+1})\sigma_y(R_{n+1}) \quad (C.34)$$

Ao longo destas equações, H corresponde à tangente na curva de endurecimento do material

Anexo D

Derivadas tensoriais para o algoritmo da matriz tangente consistente

Para além das 25 derivadas utilizadas no método de *Newton-Raphson*, são necessárias mais quatro para a construção da matriz tangente consistente.

Primeira função de resíduo

$$r_{\Delta\gamma}(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}; \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}) = \left(\frac{2G}{1+2G\Delta\gamma}\right)^2 J_2(\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}) - \frac{1}{3} \left\{ 1 + D_{n+1}^2 - 2D_{n+1} \cosh \left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right] \right\} [\sigma_y(R_{n+1})]^2 = 0 \quad (D.1)$$

A primeira função de resíduo é apenas dependente da componente desviadora do tensor das deformações e como tal apenas é necessário determinar $\frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}}$.

$$\frac{\partial r_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}} = \left(\frac{2G}{1+2G\Delta\gamma}\right)^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} \quad (D.2)$$

Segunda função de resíduo

$$r_p(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}; \varepsilon_{v_{n+1}}^{e\,trial}) = p_{n+1} - Kk\varepsilon_{v_{n+1}}^{e\,trial} + \Delta\gamma D_{n+1} K\sigma_y(R_{n+1}) \sinh \left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right] = 0 \quad (D.3)$$

Nesta função de resíduo apenas a componente volumétrica do tensor das deformações encontra-se presente, sendo necessário determinar $\frac{\partial r_p}{\partial \varepsilon_{v_{n+1}}^{e\,trial}}$.

$$\frac{\partial r_p}{\partial \varepsilon_{v_{n+1}}^{e\,trial}} = -K \quad (D.4)$$

Terceira função de resíduo

$$\begin{aligned}
 r_D(\Delta\gamma, p_{n+1}, D_{n+1}, R_{n+1}, f_{n+1}; \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}, \varepsilon_{v_{n+1}}^{e\,trial}) \\
 = D_{n+1} - D_n - \Delta\gamma \sinh \left[\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y(R_{n+1})} \right] (f_{n+1} - f_{n+1}^2) \sigma_y(R_{n+1}) \\
 - \frac{3}{\sqrt{\pi}} f_{n+1}^{0.5} \varepsilon_{eq_{n+1}} \Delta \varepsilon_{eq_{n+1}} \left[1 \right. \\
 \left. - \left| 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \left(\frac{27}{2} \frac{\det(\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial})}{\left(\frac{3}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} : \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} \right)^{3/2}} \right) \right| \right] = 0
 \end{aligned} \tag{D.5}$$

Esta é a única função de resíduo que é dependente de ambas as componentes (desviadora e volumétrica) do tensor das deformações, sendo necessário determinar $\frac{\partial r_D}{\partial \varepsilon_{v_{n+1}}^{e\,trial}}$ e $\frac{\partial r_D}{\partial \varepsilon_{d_{n+1}}^{e\,trial}}$

Derivada da terceira função de resíduo relativamente a $\varepsilon_{v_{n+1}}^{e\,trial}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial r_D}{\partial \varepsilon_{v_{n+1}}^{e\,trial}} \\
 = -\frac{3}{\sqrt{\pi}} f_{n+1}^{0.5} \left[\frac{2}{3} \frac{\mathbf{I} : \left((\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} + \varepsilon_{v_{n+1}}^{e\,trial} \mathbf{I}) + \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \right)}{\sqrt{\frac{2}{3} \left((\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} + \varepsilon_{v_{n+1}}^{e\,trial} \mathbf{I}) + \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \right) : \left((\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} + \varepsilon_{v_{n+1}}^{e\,trial} \mathbf{I}) + \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \right)}} \right] g_{\bar{\theta}_{n+1}} \left(\Delta \varepsilon_{eq_{n+1}} + \varepsilon_{eq_{n+1}} \right)
 \end{aligned} \tag{D.6}$$

Derivada da terceira função de resíduo relativamente a $\varepsilon_{d_{n+1}}^{e\,trial}$

A componente desviadora do tensor das deformações encontra-se no interior de um módulo exigindo alguma atenção no cálculo de $\frac{\partial r_D}{\partial \varepsilon_{d_{n+1}}^{e\,trial}}$. Neste caso, importa analisar $g_{\bar{\theta}_{n+1}}$, que se apresenta na equação (D.7)

$$g_{\bar{\theta}_{n+1}} = 1 - \left| 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \left(\frac{27}{2} \frac{\det(\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial})}{\left(\frac{3}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} : \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} \right)^{3/2}} \right) \right| \tag{D.7}$$

O cálculo da derivada da equação anterior relativamente a $\varepsilon_{d_{n+1}}^{e\,trial}$ consistem em:

$$\frac{\partial g_{\bar{\theta}_{n+1}}}{\partial \varepsilon_{d_{n+1}}^{e\,trial}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{d_{n+1}}^{e\,trial}} \left(\left| 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \left(\frac{27}{2} \frac{\det(\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial})}{\left(\frac{3}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} : \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} \right)^{3/2}} \right) \right| \right) \tag{D.8}$$

Por questões de simplificação, assumimos que $\frac{27}{2} \frac{\det(\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial})}{\left(\frac{3}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} : \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} \right)^{3/2}} = \xi$, podendo-se escrever

$$\frac{\partial g_{\bar{\theta}_{n+1}}}{\partial \epsilon_{d_{n+1}}^{e\ trial}} = \frac{\partial}{\partial \epsilon_{d_{n+1}}^{e\ trial}} \left(\left| 1 - \frac{2}{\pi} \arccos(\xi) \right| \right) \quad (D.9)$$

Para o cálculo da derivada anterior é necessário remover o módulo. Considerando

$$g(\xi) = \left| 1 - \frac{2}{\pi} \arccos(\xi) \right| \quad (D.10)$$

e

$$h(\xi) = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos(\xi) \quad (D.11)$$

e representando ambas as funções no mesmo gráfico (Figura D.1), conclui-se que

$$\frac{\partial g_{\bar{\theta}_{n+1}}}{\partial \epsilon_{d_{n+1}}^{e\ trial}} = \begin{cases} -\frac{\partial h(\xi)}{\partial \epsilon_{d_{n+1}}^{e\ trial}}, & \xi < 0 \\ \frac{\partial h(\xi)}{\partial \epsilon_{d_{n+1}}^{e\ trial}}, & \xi \geq 0 \end{cases} \quad (D.12)$$

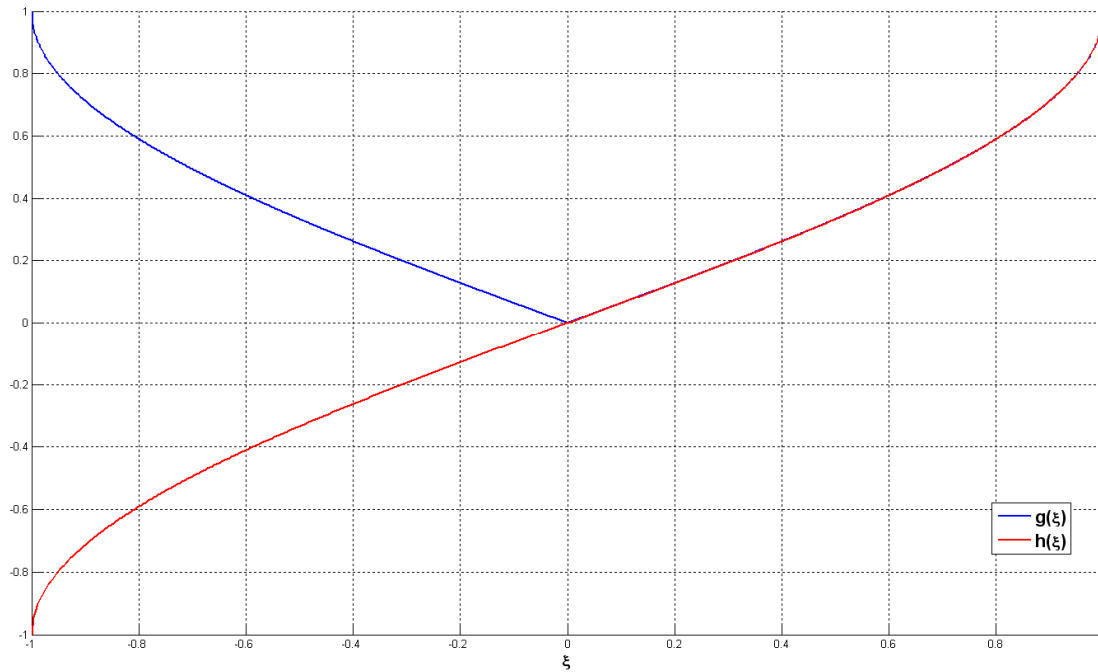


Figura 10.1 - Funções $g(\xi)$ e $h(\xi)$.

Note-se que se considerou que no caso particular de $\xi = 0$, a derivada é obtida pelo ramo direito, o que em termos analíticos encontra-se incorrecto, uma vez que, neste ponto devido à descontinuidade não existe derivada. Porém, em termos numéricos, ξ nunca é nulo, permitindo esta simplificação. Apresenta-se de seguida as respectivas derivadas.

Para valores de $\xi \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial}} = & -\frac{3}{\sqrt{\pi}} f_{n+1}^{0.5} \frac{\partial \varepsilon_{eq_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial}} \Delta \varepsilon_{eq_{n+1}} \left[\frac{2}{\pi} \arccos \left(\frac{27}{2} \frac{\det(\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial})}{\left(\frac{3}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial} : \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial} \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \right] \\ & - \frac{3}{\sqrt{\pi}} f_{n+1}^{0.5} \varepsilon_{eq_{n+1}} \frac{\partial \Delta \varepsilon_{eq_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial}} \left[\frac{2}{\pi} \arccos \left(\frac{27}{2} \frac{\det(\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial})}{\left(\frac{3}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial} : \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial} \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \right] \\ & + \frac{3}{\sqrt{\pi}} f_{n+1}^{0.5} \varepsilon_{eq_{n+1}} \Delta \varepsilon_{eq_{n+1}} \frac{2}{\pi} \left[\frac{\frac{27}{2} [C_1 - C_2]}{\sqrt{1 - \left[\frac{27}{2} \frac{\det(\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial})}{\left(\frac{3}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial} : \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial} \right)^{\frac{3}{2}}} \right]^2}} \right] \end{aligned} \quad (D.13)$$

Para valores de $\xi < 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial}} = & -\frac{3}{\sqrt{\pi}} f_{n+1}^{0.5} \frac{\partial \varepsilon_{eq_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial}} \Delta \varepsilon_{eq_{n+1}} \left[\frac{2}{\pi} \arccos \left(\frac{27}{2} \frac{\det(\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial})}{\left(\frac{3}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial} : \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial} \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \right] \\ & - \frac{3}{\sqrt{\pi}} f_{n+1}^{0.5} \varepsilon_{eq_{n+1}} \frac{\partial \Delta \varepsilon_{eq_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial}} \left[\frac{2}{\pi} \arccos \left(\frac{27}{2} \frac{\det(\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial})}{\left(\frac{3}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial} : \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial} \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \right] \\ & - \frac{3}{\sqrt{\pi}} f_{n+1}^{0.5} \varepsilon_{eq_{n+1}} \Delta \varepsilon_{eq_{n+1}} \left\{ \frac{2}{\pi} \left[\frac{\frac{27}{2} [C_1 - C_2]}{\sqrt{1 - \left[\frac{27}{2} \frac{\det(\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial})}{\left(\frac{3}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial} : \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial} \right)^{\frac{3}{2}}} \right]^2}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (D.14)$$

Nas equações anteriores, $\frac{\partial \varepsilon_{eq_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial}}$ e $\frac{\partial \Delta \varepsilon_{eq_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial}}$ são definidas pela equação seguinte

$$\frac{\partial \Delta \varepsilon_{eq_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial}} = \frac{\partial \varepsilon_{eq_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial}} = \frac{2}{3} \frac{\left((\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial} + \varepsilon_{v_{n+1}}^{e\ trial} \mathbf{I}) + \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \right)}{\sqrt{\frac{2}{3} \left((\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial} + \varepsilon_{v_{n+1}}^{e\ trial} \mathbf{I}) + \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \right) : \left((\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial} + \varepsilon_{v_{n+1}}^{e\ trial} \mathbf{I}) + \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \right)}} \quad (D.15)$$

e C_1 e C_2 consistem em

$$C_1 = \det(\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial}) [\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial}]^{-T} \left(\frac{3}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial} : \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\ trial} \right)^{-\frac{3}{2}} \quad (D.16)$$

$$C_2 = \frac{9}{2} \left(\frac{3}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} : \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} \right)^{-\frac{5}{2}} \det(\boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial}) \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^{e\,trial} \quad (D.17)$$

Bibliografia

- Andrade Pires, F. M. (2001). *Modelação por Elementos Finitos da Iniciação da Fractura Dúctil nos Processos de Enformação Plástica em Massa*. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Bai, Y. (2008). *Effect of Loading History on Necking and Fracture*. PhD Thesis: Massachusetts Institute of Technology.
- Bai, Y., Bao, Y., & Wierzbicki, T. (2006). Fracture of prismatic aluminum tubes under reverse straining. *International Journal of Impact Engineering* , 32, 671-701.
- Bao, Y. (2003). *Prediction of Ductile Crack Formation in Uncracked Bodies*. PhD Thesis: Massachusetts Institute of Technology.
- Bao, Y., & Wierzbicki, T. (2004). On Fracture locus in the equivalent strain and stress triaxility space. *International Journal of Mechanical Sciences* , 46, 81-98.
- Barralis, J., & Maeder, G. (1997). *Prontuário de metalurgia. Elaboração, Estruturas-Propriedades e Normalização*. (L. F. Martins da Silva, Trans.) Fundação Calouste Gulbenkian.
- Brunig, M., Chyra, O., Albrecht, D., Driemeier, L., & Alves, M. (2007). A ductile damage criterion at various stress triaxilities. *International Journal of Plasticity* .
- de Sousa Neto, E. A., Peric, D., & Owen, D. R. (2008). *Computational Methods for Plasticity: Theory and application*. Wiley.
- Gurson, A. L. (1977). Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I. Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of Engineering Materials and* , 99, 2 - 15.
- Kachanov, L. M. (1958). Time to the rupture process under the creep conditions. *Otdel. Techn. Nauk* , 8, 26-31.
- Lemaitre, J. (1990). *A Course on Damage Mechanics*. Springer.
- Lemaitre, J., & Chaboche, J. (1984). *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press.
- Lemaitre, J., & Desmorat, R. (2005). *Engineering Damage Mechanics*. Springer.
- Matweb. (n.d.). Retrieved Março 4, 2009, from <http://www.matweb.com/index.aspx>
- McClintock, F. A. (1968). A criterion for ductile fracture by growth of holes". *J. Appl. Mech.* , 35, 363-371.
- Milne, I., Ritchie, R. O., & Karihaloo, B. (Eds.). (2004). *Comprehensive Structural Integrity*. Elsevier.
- Natal Jorge, R. M., & Dinis, L. M. (2004). *Teoria da Plasticidade*. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto: Apontamentos de aulas.
- Rice, J. R., & Tracey, D. M. (1969). On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *J. Mech. Phys. Solids* , 17, 201-217.

- Silva Gomes, J. F. (2004). *Mecânica dos Sólidos e Resistência dos Materiais*. Edições INEGI.
- Teng, X. (2008). Numerical prediction of slant fracture with continuum damage mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 75, 2020-2041.
- Tvergaard, V. (1982). Influence of void nucleation on ductile shear fracture at a free surface. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 30, 399–425.
- Tvergaard, V. (1981). Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions. *International Journal of Fracture*, 17, 389–407.
- Tvergaard, V., & Needleman, A. (1984). Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metallurgica*, 32, 157–169.
- Xue, L. (2007). *Ductile Fracture Modeling - Theory, Experimental Investigation and Numerical Verification*. PhD Thesis: Massachusetts Institute of Technology.
- Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. (2005). *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics* (6 ed.). Elsevier Butterworth Heinemann.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., & Zhu, J. Z. (2005). *The Finite Element Method. Its Basis & Fundamentals* (6 ed.). Elsevier Butterworth Heinemann.